2024 春学科营数分期中讲座

Part 1 基础知识梳理

讲解人：张少秋

期中考试要来了怎么办！急急急！

一点都还没学会怎么办！急急急

学过的全部忘了怎么办！急急急！

不要急！Tygg 说：稳啦！全部都稳啦！（开个玩笑哈哈哈哈）

言归正传，我和你们一样，也是大一一名学习数分的普通学生。期中考试逼近之际，我也希望能为大家的复习分享一些自己的知识与题目，帮助大家都能够做到以最良好的状态去应对期中考试。

今天的讲座主要是关于数分考试范围内的基础部分的串讲，包括各大概念的回顾与一些基本题型(都是考试题)的讲解，让你做到即使没有 tygg 那样万能与恐怖的智商，也能获取令自己满意的成绩！

Ps：压轴题讲座在明天喵！常微分方程和空间解析几何的讲座也在明天喵！如果泥已经基础扎实的话，我的建议是把本讲义里面的题目过一遍喵！毕竟都是为你们的备考而服务喵！听不听讲座真的无所谓的喵！加油喵！

一、多元函数的极限与连续(Chapter 13)

前言：本章虽然内容很有“数分的味道”，但是鉴于我们是工科数分的缘故，其实大部分对本章知识的考察都仅仅是停留在“知识是否理解”的层次。如果要出压轴题的话那本章也只会作为基础理论体系进行支撑，不会单独考察，压轴题的主力军还是在 Chapter 14。那么下面我们先进行一个重点知识的汇总复习

1.n维 Euclid 空间上的点集

1.1 基本概念：

(1)n维空间：

$$\boldsymbol{x}=\{(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)|x_k\in\mathbb{R},k=1,2,3,\ldots,n\}$$

这里大家可以类比线性代数里学过的知识进行理解，同样可以引出内积的定义高维空间两点间距离的定义：

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,\mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

由此为基础便可进一步得到$\mathbb{R}^n$中收敛点列的概念，此处略(本章知识的一大特点就是可以类比着一元函数微积分学里的内容去对应思考理解，可以将高维空间发生的事情全部看做是由一维，二维空间引申上去的。后面推广的实数系基本定理也可以如法炮制)

(2)平面点集：毕竟“多元函数微积分”——虽然名字是“多元”，但是其实其研究主体还是基于二元函数的嘛，那么这一小节就是对二维空间里的点集进行的阐述与复习。大家主要记住几个概念就好：

- 邻域：注意圆邻域和方邻域的不同，若题目没有特别指出是哪种邻域则统一视作二者皆可(这是由于任意大小的圆形与正方形均可被另外的正方形与圆形覆盖的缘故)

- 内点，外点，边界点，聚点(记住那些奇奇怪怪的符号分别表示什么):

  内点：$\exists\delta>0,U(P_0,\delta)\subset E$，从定义上也很好理解——在点集的内部嘛！于是它的某个邻域也是被E所包括的。E的所有内点构成的集合称之为内核，记作E^0

  外点：$\exists\delta>0,U(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$

  边界点：$\forall\delta>0,U(P_0,\delta)\cap E^c\neq\varnothing,U(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$(这里的$E^c=\mathbb{R}^2/E$)，即这个点的任意邻域与$E,E^c$均有交集。$E$的全体边界点的集合称作$E$的边界，记作$\partial E$

  聚点：$\forall\delta>0,\mathring{U}(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$，由定义即可知内点必为聚点，外点必不为聚点，边界点则不一定(考虑以孤立点形式存在的边界点)。E的聚点的全部集合即为导集，记作E'

- 开集闭集和区域:

  开集：即$E=E^0$

  闭集：即$E'\in E$，若该点集无聚点，则显然为闭集

  引申得到闭包：$\bar{E}=E\cup E'$

  而区域的定义是建立在连通集上的,由于时间关系这里不做展开赘述(反正也不会考……),大家只需要针对一些常见的结论与反例进行记忆即可(见后方题目)

(3)$\mathbb{R}^2$上的基本定理：本小节内容是将实数系基本定理从一维到二维的推广，例如:

- 闭区间套定理———闭矩形套定理，进一步衍生得到
- 有限覆盖定理———紧性定理，即紧集等价于有界闭集(几乎也不考)
- 聚点定理，Cauchy 收敛准则……大家有个印象就好，毕竟 Checkin 可是能出

定理默写的填空题的人，别到时候默写不出来(:tieba_laugh:)

如上，对于准备期中考试而言，你并不需要对定理的内容有多么深刻的理解或者是应用能力，你需要做的便是澄清所有概念之间的差异与不同，并结合部分题目进行更深层次的理解

1.2 题目选讲

说题目这不就来了……由于真题较少，窝选用了一些教材上的作业题

如果是你做过的或者你已经完全掌握的内容，可以不听喵

【1】

4. $S=\{(x,y)|0<x\leqslant 1,y=\sin\frac{1}{x}\}$。**则$S$的内核**$S^0=$________________**，** S**的边界集**$\partial S=$____________________________。

(数分 C 期中 16-17T4)

5. 设平面点集 $E=\left\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x},0<x\le\frac{2}{\pi}\right\}$，则

$E^{\circ}=$______________，$\partial E=$__________________________________.

(数分测验 19-20T5)

答案：$\varnothing;E\cup\{(0,y)|-1\leqslant y\leqslant 1\}$

下面是教材选讲:

【2】讨论下列函数在$(0,0)$处二重极限的存在性:

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

解:

(2) $L=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{1+\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}}$，故原极限是否存在依赖于极限

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}$是否存在：若取$y=x$，显然该极限为0

若取$y=x^2$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2=\infty$

于是原极限不存在

(3)令$y=kx^2$，于是$L=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{kx^4}{2x^4}=\dfrac{k}{2}$不唯一

于是原极限不存在

【3】计算下列函数的两个累次极限:

(1)$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}(x\to0,y\to0)$

(2)$f(x,y)=\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}(x\to0,y\to0)$

(3)$f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}(x\to+\infty,y\to0^+)$

解:

(1)$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}(1-x)=1,\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}(y-1)=-1$

(2)$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}(y-1)=-1$

(3)不妨设$x,y>0$,于是有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to0^+}f(x,y)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{y\ln x}}}=1$

【4】设二元函数$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，记

$$D_1=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},D_2=\{(x,y)||y|<x^2\}$$

证明：$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}}f(x,y)$不存在，但$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}}f(x,y)$存在.

证明:

(1)取$y=kx$即得$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y)=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$不唯一，因而该极限不存在

(2)由$\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1+2\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1+2\left|\dfrac{x^2}{1+x^2}\right|\to 1$知$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y)=1$，得证.

另证：$|y|<x^2\Rightarrow\dfrac{|y|}{|x|}<|x|\to 0$，从而:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}}\frac{1-\left|\frac{y}{x}\right|^2}{1+\left|\frac{y}{x}\right|^2}=1$$

2.二元函数的极限与连续

2.1 二重极限与二次极限:

(1)速记定义: 二重极限即严格**按照极限定义**得到的极限, 而二次极限则是先将一个变量视作常数求一次极限，然后再对得到的结果求第二次极限(其实与后面)偏导数以及二次积分的概念很相似，请结合辅助记忆喵!

(2)重点 1：二重极限与二次极限互不包容!

反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x=y=0\end{cases}$$

容易证明二重极限不存在，但二次极限均为零，再看如下反例:

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x=y=0\end{cases}$$

容易证明其二重极限存在且为零，但两个二次极限都是存在的

(3)重点 2：虽然二者互不包容，但是还是可以有一些暧昧不清的关系滴~~:

- 二重极限存在+某个首次极限存在=二重极限与该二次极限相等

- 二重极限与两个二次极限均存在，则三者相等
- 两个二次极限不等，则二重极限不存在

由此可以引申出证明二重极限不存在的重要方法：即通过换元将y或者x变成关于另一个的过极限点的函数，若求得的二次极限含参，则 GG。典型的例子是采用正比例函数$y=kx$进行换元，但当情况复杂的时候也可考虑极坐标或者多项式换元。

这里细致提一下极坐标的换元，因为课上基本没讲过：

详细内容可以看知乎文章：[求二重极限时，极坐标代换究竟该怎么用？ - 知乎 (zhihu.com)]

理论依据：使用极坐标能满足二重极限的定义：

定理 1 若二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，$\lim\limits_{(x_0,y_0)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$（设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$）$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall r:0<r<\delta, \forall\theta:0\leqslant\theta<2\pi, (r,\theta)\in D$ 有 $|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon$

证明：(1) 必要性。已知 $\lim\limits_{(x_0,y_0)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall(x,y)\in D:0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$。设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$，$\forall\theta:0\leqslant\theta<2\pi$ 有 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$，故 $\exists\delta>0, \forall r:0<r<\delta$，$\forall\theta:0\leqslant\theta<2\pi, (r,\theta)\in D$，有 $|f(x,y)-A|=|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon$

(2) 充分性：由已知可设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$，$\forall\theta:0\leqslant\theta<2\pi$，有 $|x-x_0|=|r\cos\theta|\leqslant r$，$|y-y_0|=|r\sin\theta|\leqslant r$，且 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$，取 $\eta=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$，于是，$\forall\varepsilon>0, \exists\eta=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}>0, \forall(x,y)\in D: |x-x_0|<\eta, |y-y_0|<\eta$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有 $|f(x,y)-A|=|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{(x_0,y_0)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$。

从定理 1 可知，若二重极限存在，则采用极坐标换元所得结果即为该极限值；反之，若使用极坐标换元所得极限存在，则二重极限存在。

使用方法这里我塞两道去年的讲座题目：

【5】(2021 级期中大作业第 2 题) 判断函数 $\dfrac{(2x+1)^y-1}{x^2+2y^2}$ 在 $(0,0)$ 处是否存在极限，

并说明理由.

解：$(2x+1)^y-1\sim y\ln(2x+1)\sim 2xy$，考虑极坐标系下表达式：

$$\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

从而该极限与θ有关，从而原极限不存在.

【6】(2012 级期中考试第 1 题）计算二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{2x-y}$.

解：利用极坐标系下结果，显然该极限不存在. 为方便试卷大题书写，取路径

$2x-y=-kx^3\Rightarrow y=kx^3+2x$，从而得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(kx^3+2x)}{-kx^3}=-\frac{2}{k}$$

从而极限结果与路径有关，从而原极限不存在.

2.2 二元函数滴连续性~

本节也主要以概念的理解抽象为主，特别是从一元到二元这个过程

(1)连续与一致连续：定义与一元函数类似，注意将邻域从一元函数的开区间换成了面积，以及两点之间的距离变化！

连续：$f(P)$于D定义，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P(x,y)\in U(P_0,\delta)\cap D$:

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$$

则称$f(P)$于P_0处连续

一致连续：同样的，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P',P''\in D(\mathrm{d}(P',P'')<\delta)$:

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

(2)有界闭域上连续函数的性质：

相关定理的证明不用刻意理解，重点是在一元到二元的这个过程

- 有界性，最值性，一致连续性保持不变
- 零值性与介值性：所需条件注意是“道路连通集”，其证明方式通常为二元->

一元再利用现成的结果

2.3 题目选讲

【7】

7. $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$。**则在**$(0,0)$**点处，下列说法正确的是**(　　)

(A) **两个二次极限均不存在，而二重极限存在；**

(B) **两个二次极限和二重极限均不存在；**

(C) **两个二次极限和二重极限均存在；**

(D) **以上说法均不对。**

(数分 C 类 16-17T7)

答案：A

【8】设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}\quad (p>0)$$

讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性

这道题可以讲一讲自己是怎么一开始做不出来的：

一开始我的想法是使用经典的多项式换元：$y=x$，进而得到：

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2^p}\times x^{1-2p}$$

看似答案呼之欲出，实则暗藏玄坤，这是为什么呢？

解：令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=r^{1-2p}\cos\theta=\begin{cases}0,0<p<\dfrac{1}{2},\\ \text{不存在},p\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$

于是$0<p<\dfrac{1}{2}$时连续，$p\geqslant\dfrac{1}{2}$时不连续

【9】(数分荣誉期中 22-23T17)

17. 设二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内对x(固定y时)连续，对y(固定x时)连续，且对x(固定y时)单调. 证明：$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

【证】 $\forall\varepsilon>0$，由$f(x,y_0)$在$x=x_0$处连续知，$\exists\delta_1>0$，使得

$$|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

当$x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_1$时，由于$f(x,y)$对$x$单调，故$f(x,y)-f(x_0,y_0)$介于$f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0,y_0)$之间，从而有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leq\max\{|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|\}.$$

由于$f(x_0\pm\delta_1,y)$在$y=y_0$处连续，故$\exists\delta_2>0$，当$y_0-\delta_2<y<y_0+\delta_2$时，有

$$|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$|x-x_0|,|y-y_0|<\delta$时，有

$$|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|\leq|f(x_0\pm\delta_1,y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

从而

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

【10】(21-22 数分大作业 T7)

7. 设函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续，且极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在(有限数). 试判断$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性，并说明理由.

解：可微，只需注意到：

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

二、多元函数微分学(Chapter 14)

前言：本章是期中考试的重点！考到的题型从基础的偏导数/方向导数计算到让人头晕目眩的变换方程比比皆是！但是从总体上而言，本章的知识事实上并不存在“难”的说法，而是知识点繁多以及计算量庞大，如果短时间卡住了会非常影响心态，本章的一大特点便是方法多，手段多，但是又没有诸如上学期积分不等式那般“绝对难度”的恐怖。

按照知识的不同层级，我把本章内容分为了两大部分：

基础知识部分：

偏导数的定义与计算；

全微分的定义与计算；

高阶偏导数与高阶全微分；

二元函数的 Taylor 公式(这个几乎不怎么考)

应用部分：

极值问题(记住每个步骤与 Hessi 矩阵即可)

隐函数存在定理(这一集最烦人，牛魔，类型贼多)；

方向导数与梯度(这个考的最简单)；

空间解析几何中的应用(看你们寒假有没有好好学~)；

条件极值(我觉得都能用不等式秒了:tieba_laugh:)

那么下面：_________,启动！

1.多元函数微分学的基础知识

1.1 偏导数与全微分

(1)定义：定义是你最强大的武器！很多时候题目用二级结论做不出来的时候试试伟大的定义永远没错！事实上很多题目的考察方向便是不准你用二级结论，这样也可以起到考察学生基础的作用

那么偏导数定义如下：即极限

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

其本质是二元函数$f(x,y)$在固定某个变量的时候对另一个变量而言的**偏增量**

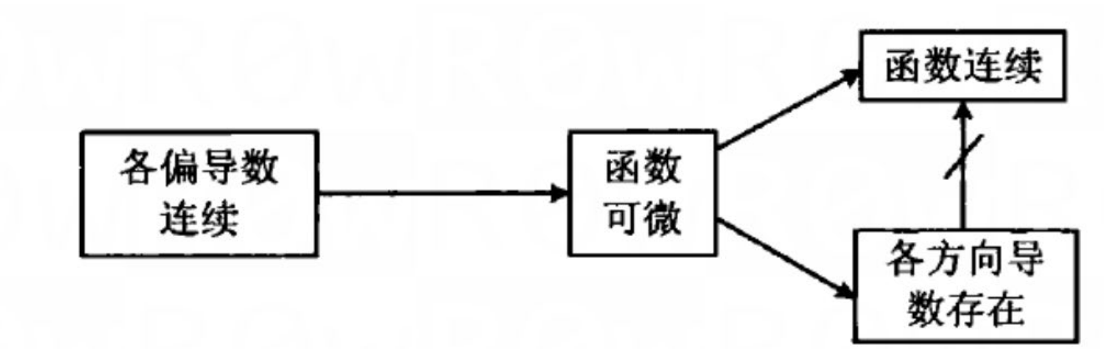
可微的定义如下：若**全增量**

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中A,B为与$\Delta x,\Delta y$无关的常数，则称函数在该点可微，此处若可微，则$A=f_x(x_0,y_0),B=f_y(x_0,y_0)$

事实上,关于可微的证明通常就是在先求出偏导数值的情况下验证剩余部分是否为ρ的高阶无穷小

这里有一个重要的定理，**即偏导数连续，原函数可微**，具体关系可见下图：



(这图还是在水源上找到的)

(2)向量值函数的导数：只需要记住一个 Jacobi 矩阵就可：

设向量值函数

$$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

设点$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$，其 Jacobi 矩阵即

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}$$

此时n元函数即$m=1$时候的特殊情况~

(3)复合多元函数求偏导————还是链式法则!

速记：分别求导再相加:

$z=f(u,v)$，其中u,v是关于x,y的二元函数，于是其偏导数即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

若此时u,v是关于某自变量的**一元函数**，则称为**全导数**

(4)复合多元函数的全微分————一阶全微分形式不变性!

速记：形式不变!

$z=f(u,v)$，其中u,v是关于x,y的二元函数，其全微分即:

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

(5)关于高阶：导是没什么难度的，这一部分主要有一个关于混合偏导数相等的定理:

若$f_{xy}(x,y),f_{yx}(x,y)$在点(x_0,y_0)处均连续，则$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

此处关于该定理的退化版本在作业题以及考试中均经常涉及

同时注意一下方程变换类型的题目，我愿称之为恶心之最，后面会讲到

高阶全微分：类比二项式公式记忆即可，此处不细讲，几乎不考。且二阶全微分已不具有形式不变性

1.2Taylor 公式

几乎没考过，带着大家简单过一下概念与计算：

书上的内容定义过于抽象，如果看书上的部分理解困难的话不妨看看这种角度来理解：

- **一元函数在点x_k处的泰勒展开式为：**

$$f(x)=f(x_k)+(x-x_k)f'(x_k)+\frac{1}{2!}(x-x_k)^2f''(x_k)+o^n$$

- **二元函数在点(x_k,y_k)处的泰勒展开式为：**

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_k,y_k)+(x-x_k)f'_x(x_k,y_k)+(y-y_k)f'_y(x_k,y_k)\\&+\frac{1}{2!}(x-x_k)^2f''_{xx}(x_k,y_k)+\frac{1}{2!}(x-x_k)(y-y_k)f''_{xy}(x_k,y_k)\\&+\frac{1}{2!}(x-x_k)(y-y_k)f''_{yx}(x_k,y_k)+\frac{1}{2!}(y-y_k)^2f''_{yy}(x_k,y_k)\\&+o^n\end{aligned}$$

实际上就是将之前的一元函数泰勒展开变成了对每个偏导数展开后结果的求和

计算一道课后习题加深理解：

【1】求函数$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$在点$(1,-2)$的 Taylor 展开式

解：先求该函数的偏导数：

$$\begin{aligned}&f_x(x,y)=4x-y-6\\&f_y(x,y)=-x-2y-3\\&f_{xx}(x,y)=4\\&f_{yy}(x,y)=-2\\&f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-1\end{aligned}$$

代入 Taylor 公式即得：

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2+o\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)$$

Remark：记得加高阶无穷小.

1.3 题目选讲

【2】(数分荣誉 19-20 小测 T11)

11. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ **(1)** 求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$；

(2) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，并说明理由；

(3) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性，并说明理由.

【解】(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-0}{x}=1$，

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0.$$

(2) 由于 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$|f(x,y)|=|x|\cdot\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leq|x|\to0\ (x\to0,y\to0)$，故有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

(3) 记 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，由于

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]=\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-\Delta x=\frac{-\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

令 $\Delta y=\Delta x$，由于 $\dfrac{\frac{-\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=-\dfrac{\Delta x\Delta y^2}{\rho^3}=-\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{2}\,|\Delta x|}$ 当 $\Delta x\to0$ 时无极限，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

【3】(数分荣誉 19-20T8)

8.(8 分) 求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导数，并讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性和可微性.

解：先考虑$(0,0)$处的连续性：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$$

于是原函数连续，下面计算偏导数：

Case 1：$x^2+y^2\neq 0$时：

$$f_x=\frac{(2x-3x^4-4x^2y^2-y^4)\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{2y(1-x^3-xy^2)\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Case 2：$x^2+y^2=0$时：按照定义去求：

$$f_x=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=-1$$

$$f_y=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(y,0)-f(0,0)}{y-0}=0$$

最后我们来考虑可微性：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{o[x(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

于是原函数在$(0,0)$可微

【4】(20-21 数分荣誉测验 T1)

设 f 为可微函数，又 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$

答案：0

【5】(数分 C 类 11-12T10)

10. 设函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(**A**) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(**B**) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(**C**) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(**D**) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在. 【　　】

答案：B

A 反例：$f(x,y)=|x|+|y|$

C,D 反例：$f(x,y)=x$

关于 B 选项的证明：先由极限存在导出 $f(0,0)=0$，设 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$

得到 $f(x,y)-f(0,0)=A(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=o(\rho)$，即可证明

【6】(14-15 数分 C 类 T12)

12. 设二元函数 $z=z(x,y)$ 可微. 令 $u=xy$，$v=\frac{x}{y}$，取 u,v 为新的自变量，试变换

方程：$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解：开导!!!

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}+-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入化简!

$$2u\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

【7】(数分致远 15-16T10)

10.设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，求 z_x,z_y,z_{xy}.

解:

算就对了:

$$z_x=f_1+\frac{1}{y}f_2,\ z_y=-\frac{x}{y^2}f_2$$

$$z_{xy}=z_{yx}=-\frac{1}{y^2}f_2-\frac{x}{y^2}\left(f_{12}+\frac{1}{y}f_{22}\right)$$

【8】在方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

中做代换

$$u=x+y,v=x-y,w=xy-z$$

若取 u,v 为新自变量，$w=w(u,v)$ 为新函数，求变换后的方程.

解：由题意得 $z=xy-w$，于是求导即可得到:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial x}=y-\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=y-\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial y}=x-\left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x-\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

直接带入原方程即得:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$$

【9】设$x=u,y=\dfrac{u}{1+uv},z=\dfrac{u}{1+uw}$，若取$u,v$为新自变量，$w=w(u,v)$为新

函数，试变换方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

解：由题意$u=x,v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x},z=\dfrac{u}{1+uw}$

根据题意求导:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(xw+1)^2}\left(1-x^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y^2(1+xw)^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}
\end{aligned}
$$

带入原方程即得:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0$$

【插播一道】挺有意思的题目:

6. 设函数$u=u(x,y)$可微，且$u(x,2x)=x$，$u_x(x,2x)=x^2$,则$u_y(x,2x)=$(**A**)

(A)$\frac{1-x^2}{2}$.　　**(B)**$1-x^2$.　　**(C)**$-\frac{x^2}{2}$.　　**(D)**x^2.

下面是关于混合偏导交换顺序定理的补充:

【10】(混合偏导交换顺序定) 若函数$f(x,y)$的两个二阶混合偏导数在点(x,y)处连续，则

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

证明: 考虑如下二阶混合差分:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)$$

记Δ_x,Δ_y分别为关于x,y的向后差分（例如$\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$），则可以将上述式子改写为:

$$\Delta_x\Delta_y f=\Delta_y\Delta_x f$$

两边分别利用两次拉格朗日中值定理（从外到内）得到:

$$\Delta x\Delta y f_{yx}(\xi_1,\eta_1)=\Delta x\Delta y f_{xy}(\xi_2,\eta_2)\Rightarrow f_{yx}(\xi_1,\eta_1)=f_{xy}(\xi_2,\eta_2)$$

两边同时取$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$，命题即可得证.

Ps: 注意到最后只利用了混合偏导在该点的极限存在，从而原命题条件可以弱化

【11】设f_x,f_y和f_{xy}在点(x_0,y_0)的某邻域内存在，且f_{xy}在点(x_0,y_0)连续，证明:

$f_{yx}(x_0,y_0)$也存在，且$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

证明: 不失一般性，设$x_0=y_0=0$，否则构造函数

$$g(x,y)=f(x_0+x,y_0+y)$$

归结于证明$g_{xy}(0,0)=g_{yx}(0,0)$. 考虑如下二阶差分:

$$\varphi(x,y)=f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)$$

由已知，$\varphi_x,\varphi_y,\varphi_{xy}$在原点邻域内存在，且$\varphi_{xy}$在原点处连续. 不难注意到:

$$\varphi_{xy}=f_{xy},\quad \varphi_y(x,0)=f_y(x,0)-f_y(0,0)$$

从而目标归结为证明$\varphi_{yx}(0,0)$也存在，也即:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi_y(x,0)-\varphi_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi_y(x,0)}{x}$$

存在，且该极限为$\varphi_{xy}(0,0)$. 记$g(x,y)=f(x,y)-f(x,0)$，则g_x存在，从而:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=g(x,y)-g(0,y)&\xlongequal{\text{Lagrange}}g_x(\xi,y)x\\&=[f_x(\xi,y)-f_x(\xi,0)]x\xlongequal{\text{Lagrange}}f_{xy}(\xi,\eta)xy\end{aligned}$$

其中$|\xi|<|x|,|\eta|<|y|$，由f_{xy}在原点处连续知:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)}{xy}=f_{xy}(0,0)=\varphi_{xy}(0,0)\Longleftrightarrow\varphi(x,y)=f_{xy}(0,0)xy+o(xy)$$

另一方面，记$h(x,y)=f(x,y)-f(0,y)$，则h_y存在，从而

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=h(x,y)-h(x,0)&\xlongequal{\text{Lagrange}}h_y(x,\eta)y\\&=[f_y(x,\eta)-f_y(0,\eta)]y=\varphi_y(x,\eta)y\end{aligned}$$

从而（这里偷懒一下用高阶无穷小记号，严格证明见末尾 remark）:

$$\varphi(x,y)=f_{xy}(0,0)xy+o(xy)=\varphi_y(x,\eta)y\Rightarrow f_{xy}(0,0)x+o(x)=\varphi_y(x,\eta)$$

两边同时取$y\to 0$得到:

$$f_{xy}(0,0)x+o(x)=\varphi_y(x,0)$$

从而由高阶无穷小定义即可得到:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi_y(x,0)}{x}=\varphi_{yx}(0,0)=f_{yx}(0,0)$$

从而命题得证.

Remark：若严格按照极限定义进行，则后半部分过程可以如下严格书写：已推得

$$\varphi(x,y)=\varphi_y(x,\eta)y=f_{xy}(\xi,\eta)xy$$

两边同时除以y，并令$y=0$，即可得到:

$$\varphi_y(x,0)=f_{xy}(\xi,0)x$$

两边同时除以x，并取极限$x\to 0$即可得到:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi_y(x,0)}{x}=\varphi_{yx}(0,0)=f_{yx}(0,0)$$

【12】设f_x,f_y在点(x_0,y_0)的某邻域内存在且在点(x_0,y_0)处可微，证明:

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

证明：不失一般性，设$x_0=y_0=0$，否则构造函数

$$g(x,y)=f(x_0+x,y_0+y)$$

归结于证明$g_{xy}(0,0)=g_{yx}(0,0)$. 考虑如下二阶差分:

$$\varphi(x,y)=f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)$$

记$g(x,y)=f(x,y)-f(x,0)$，则g_x存在，从而:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=g(x,y)-g(0,y)&\overset{\text{Lagrange}}{=\!=\!=}g_x(\xi,y)x\\&=[f_x(\xi,y)-f_x(\xi,0)]x\\&\overset{\text{可微}}{=\!=}\left[f_{xx}(0,0)\xi+f_{xy}(0,0)y-f_{xx}(0,0)\xi+o\left(\sqrt{\xi^2+y^2}\right)\right]x\\&=f_{xy}(0,0)xy+o\left(x\sqrt{\xi^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

从而:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)-o\left(x\sqrt{\xi^2+y^2}\right)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)}{xy}$$

另一方面，记$h(x,y)=f(x,y)-f(0,y)$，则h_y存在，从而

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=h(x,y)-h(x,0)&\overset{\text{Lagrange}}{=\!=\!=}h_y(x,\eta)y\\&=[f_y(x,\eta)-f_y(0,\eta)]y\\&\overset{\text{可微}}{=\!=}f_{yx}(0,0)xy+o\left(y\sqrt{x^2+\eta^2}\right)\end{aligned}$$

从而:

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)-o\left(y\sqrt{x^2+\eta^2}\right)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(x,y)}{xy}$$

整理两方面结果即可得到:

$$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$$

2.多元函数微分学的应用

2.1 隐函数存在定理：最抽象的一集，但是考的不难

通常情况下是分为三种情况展开，由易到难:

(1)$F(x,y)=0$的情况：注意定理的条件:

F_x,F_y在点(x_0,y_0)的某一邻域内均连续，且$F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq 0$

于是在该邻域内确定唯一隐函数$y=f(x)$，且在邻域内函数与导函数均连续，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

(2)$F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$的情况(即上一种情况的推广):

条件同理: 某点$(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,y^0)$邻域内所有偏导数均连续, 过该点, 以及$F_y\neq 0$

于是可得到唯一隐函数$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$，函数与所有偏导数连续，且

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}$$

(3)$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ (即从一对多到多对多, 教材里以二对二为例, 这样的 Jacobi 行列式计算难度最小)

条件：连续偏导数；过点；以及$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$

结论：在邻域内确定向量值隐函数，且函数连续，偏导数连续:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{J},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{J}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{J},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{J}$$

简记：即谁对谁求就把谁换成谁(什么绕口令)

(4)反函数组存在定理，其实是(3)的延伸，这里暂时略掉，我们只需要记住它的一个推论，后面重积分还会用到：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

2.2 方向导数和梯度

记一个概念就行，尤其注意方向导数的定义！这是常考内容，和偏导数的定义一样重要

(1)方向导数：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

其计算公式为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\cdot\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{P_0}$$

(2)梯度：

$$\left.\mathbf{grad}\ u\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_P$$

它的模$\|\mathbf{grad}\ u\|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$

注意：梯度是向量~~~

定理：梯度的方向即函数增长最快的方向，且变化率就是梯度的模

不用记怎么证明的，它考的很简单

2.3 偏导数的几何应用

速记：一元曲线直接导，二个方程贾鸽币，一个方程直接导，二元曲面贾鸽币

两大块：曲线和曲面，每个大块又分为两个小部分，且看：

(1)曲线的切线和法平面：

寒假没学的直接记：若在点(x_0,y_0,z_0)的切向量为(a,b,c)，那么：

- 切线：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$
- 法平面：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

那么切向量怎么求呢？最像高数的一集，直接记住：

- 一元曲线直接导：

  指形式为$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$的曲线，在某点$(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$的切向量为

$$\tau=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

- 二个方程 Jacobi：

  指形式为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的曲线(是不是很像两个平面的交线)，在某点

  (x_0,y_0,z_0)的切向量为：

$$\tau=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$$

(2)曲面的切平面与法线：

寒假没学的直接记：若在点(x_0,y_0,z_0)的法向量为(a,b,c)，那么：

- 法线：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$
- 切平面：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

那么法向量怎么求呢？如法炮制：

- 一个方程直接导：

  指形式为$F(x,y,z)=0$的曲面，在某点(x_0,y_0,z_0)的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

- 二元曲面 Jacobi：

  指形式$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$的曲面，在某点$(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$的法向量

  为：

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

2.4 极值问题

分为普通极值问题和条件极值问题，带着大家复习一遍就好：

(1)普通极值问题：

Step 1:导！

Step 2:算出驻点

Step 3:判断 Hesse 矩阵(负定极大值，正定极小值，不定无极值，特殊情况特殊处理)

Step 4:计算边界条件

(2)条件极值问题：即课本上教的拉格朗日乘数法，我带大家走一遍，不难，但是你得会(当然你要是能不等式秒天秒地也行)

Step 1:作 Lagrange 函数

Step 2:导！

Step 3:算出驻点(这一步可能会很麻烦)

Step 4:根据实际情况判断是极大值还是极小值还是虚晃一枪卖个破绽()

2.5 题目选讲:

狠狠导就对了!!!

【13】(19-20 数分致远测验 T17)

17. 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$ 上有连续的偏导数，且 $f(2,0)=f(0,3)$. 证明：在 ∂D 上至少存在两点满足

$$\frac{2}{3}yf_x(x,y)=\frac{3}{2}xf_y(x,y).$$

其实也是导，不过有一点 Trick:

【解】 令 $x=2\cos\theta, y=3\sin\theta$， $g(\theta)=f(2\cos\theta,3\sin\theta)$， 则有 $g(0)=f(2,0)$， $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0,3)$，$g(2\pi)=f(2,0)$. 由条件有 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi)$，且 $g(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可微，据 Rolle 中值定理，存在 $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\theta_2\in\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$， 使得

$$g'(\theta_1)=0,\quad g'(\theta_2)=0.$$

由于

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=-2\sin\theta f_x(2\cos\theta,3\sin\theta)+3\cos\theta f_y(2\cos\theta,3\sin\theta)\\&=-\frac{2}{3}yf_x(x,y)+\frac{3}{2}xf_y(x,y)\end{aligned}$$

故存在 $(x_1,y_1)=(2\cos\theta_1,3\sin\theta_1)$， $(x_2,y_2)=(2\cos\theta_2,3\sin\theta_2)$ 在 ∂D 上使得

$$\frac{2}{3}yf_x(x,y)=\frac{3}{2}xf_y(x,y).$$

【14】(14-15 数分 C 类 T10)

10. 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内可微，则下列断语中不正确的是【　　】

(**A**) 若对 $\forall P\in D$，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P=0$，则 f 在 D 内为常数.

(**B**) 若对 $\forall P\in D$，$\forall \boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=0$，则 f 在 D 内为常数.

(**C**) 若对 $\forall P\in D$，有 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P=0$，则 f 在 D 内的值不依赖于 y.

(**D**) 若对 $\forall P\in D$，有 $\mathrm{d}f|_P=0$，则 f 在 D 内为常数.

答案：C. 我们如下反例，关于x偏导为零，但是f的取值依赖于x：

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in[-1,2]\times[-1,0]\\ y^2, & (x,y)\in[-1,0]\times[0,1]\\ y^3, & (x,y)\in[1,2]\times[0,1]\end{cases}$$

若 A 成立，则 BD 均成立，故我们只需补证 A 选项. 关于 A 选项，对于区域内任意两点，利用水平与竖直折线链接，然后每段使用拉格朗日中值定理，即可知道折线上函数值均相等. 由于两点的选择是任意的，从而区域内所有点函数值相等，从而命题得证.

【15】(14-15 数分 C 类 T15)

15. 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数均存在；

(2) 判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性，并说明理由.

解:

(1)直接走定义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{t^3}=\cos\alpha\sin^2\alpha$$

(2)先求偏导:

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}=\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

于是有

$$\begin{aligned}&f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y-f(0,0)\\&=f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

计算极限:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\rho}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{\frac{x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}}=\text{不存在}$$

故不可微

【16】(22-23 数分荣誉 T14)

14. 在曲线$\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=6-2x^2-y^2\end{cases}$上，求竖坐标分别为最大值和最小值的点.

对条件极值的考察，一步步来就好了

【解】 令$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+2y^2-z)+\mu(z+2x^2+y^2-6)$. 由

$$\begin{cases}L_x=2\lambda x+4\mu x=0\\L_y=4\lambda y+2\mu y=0\\L_z=1-\lambda+\mu=0\end{cases}\text{导出}\begin{cases}x=0\text{ or }\lambda+2\mu=0\\y=0\text{ or }2\lambda+\mu=0\\\lambda-\mu=1\end{cases}$$

当$x=0$时，结合约束条件解得$y=\pm\sqrt{2},z=4$；

当$y=0$时，结合约束条件解得$x=\pm\sqrt{2},z=2$；

当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时，上述方程组无解. 由于函数 $f(x,y,z)=z$ 在有界闭集

$$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$$

上连续，从而有最大值和最小值. 因此竖坐标最大的点为 $(0,\pm\sqrt{2},4)$，竖坐标最小的点为 $(\pm\sqrt{2},0,2)$.

【17】(19-20 数分荣誉 T13)

13.(12 分) 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中切平面与三个坐标轴面所围成的四面体的最小体积.

解：任取一点(x_0,y_0,z_0)属于第一卦限，计算得到该点的切平面;

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

得到与坐标轴的三个交点:

$$\left(\frac{a^2}{x_0},0,0\right),\left(0,\frac{b^2}{y_0},0\right),\left(0,0,\frac{c^2}{z_0}\right)$$

于是所求体积:

$$V=\frac{(abc)^2}{6x_0y_0z_0}$$

由 A-G 不等式:

$$1=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\geqslant 3\left(\frac{x_0y_0z_0}{abc}\right)^{\frac{2}{3}}\Longrightarrow\frac{1}{x_0y_0z_0}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{abc}$$

故体积最小值为$V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$，取等条件为$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

(本题其实是想考察拉格朗日乘数法，但是用不等式做更简单)

【18】(19-20 数分荣誉 T11)

11.(8 分) 已知函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由下面的函数组来确定：

$$\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$$

求偏导数 u_x，v_x，u_y，v_x.

解：原方程组变形为：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=\mathrm{e}^u+u\sin v-x=0 \\ G(x,y,u,v)=\mathrm{e}^u-u\cos u-y=0 \end{cases}$$

求偏导计算可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}&=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}=(\mathrm{e}^u+\sin v)u\sin v-(\mathrm{e}^u-\cos v)u\cos v \\
&=u(1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)) \\
\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}&=\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}=-u\sin v \\
\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}&=\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}=\mathrm{e}^u-\cos v \\
\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}&=\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}=u\cos v \\
\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}&=\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}=-\mathrm{e}^u-\sin v
\end{aligned}$$

于是即可得：

$$u_x=\frac{\sin v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}$$

$$v_x=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u(1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v))}$$

$$u_y=\frac{-\cos v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u(1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v))}$$

【19】(课本题)设 $f(u,v)$ 可微，证明：曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上任一点的切平面都与某一定直线平行，其中 a,b,c 是不同时为零的常数

证明：(求出切平面的法向量即可)先求偏导数：

$$f_x = af_1, f_y = af_2, f_z = -bf_1 - cf_2$$

于是法向量即为

$$\boldsymbol{n} = (af_1, af_2, -bf_1 - cf_2)$$

注意到

$$\boldsymbol{n} \cdot (b, c, a) = 0$$

于是曲面$f(ax - bz, ay - cz) = 0$上任一点的切平面都与方向向量为(b, c, a)的直线平行

故原命题得证！

【20】(17-18 数分致远 T8)

8. 设有方程$x^2 + y + \sin xy = 0$，则在$(0, 0)$的某邻域内（　　　）.

（I）上述方程能确定唯一的隐函数$y = y(x)$满足$y(0) = 0$.

（II）上述方程能确定唯一的隐函数$x = x(y)$满足$x(0) = 0$

A. I不正确，II正确　　　　B. I正确，II不正确

C. I和II都正确　　　　D. I和II都不正确

解：

首先判断，方程$x^2 + y + \sin xy = 0$必然经过$(0, 0)$，利用隐函数定理进行判断是否存在隐函数，只需判断对应偏导是否为 0. 只需分别求出$\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}$（若不存在，则不存在对应的隐函数）即可. 直接求偏导略，记$F(x, y) = x^2 + y + \sin xy$，从而求得：

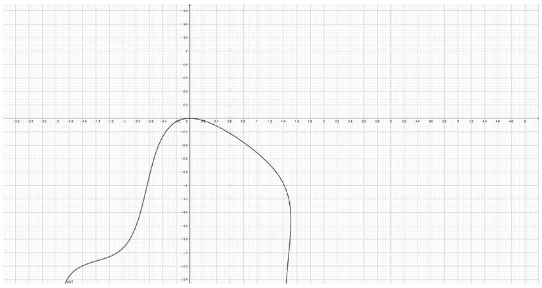
$$F_x(0, 0) = 0, F_y(0, 0) = 1$$

从而可以确定唯一的隐函数$y = y(x)$满足$y(0) = 0$. 但是隐函数定理是个充分

不必要条件，我们不能因此否定 II. 但是就课程考察的角度而言，我们总是默认，如果不满足隐函数定理，则不存在对应的隐函数（口嗨），

从而该题选 B.

Ps: 方程的图像如图所示：



由图像可以看出，不能确定唯一的隐函数$x=x(y)$，这是因为对于任意的靠近 0 的y，均存在两个x_1,x_2，使得$(x_1,y),(x_2,y)$满足方程$x^2+y+\sin xy=0$.

(这下第十四章也结束了……)

三、重积分(Chapter 16)

前言：本章内容绝对是考试的重点中的重点了，不论是基础题，中档题还是压轴题都可以用本章内容的知识进行命题。要学好本章知识，首先需要对重积分的定义有良好的理解，其次要掌握各种各样的积分计算方法，最后便是将本章知识与前两部分乃至上学期一元函数积分学的内容联系起来。

对于本章知识我们可以简单的分为两个板块：二重积分和三重积分

当然也有另一种分法：重积分及其应用

这里为了方便就按照教材上的顺序好了

1.二重积分

1.1 二重积分的定义

注意一下可求面积区域就行，确保脑子里知道二重积分是咋定义的

但是一般从来很少考二重积分的可积性。一般都是结合二次积分考特例的

1.2 二重积分与二次积分

(1)记住一点：二重积分与二次积分**互不相容!!!**

特例如下(摘自牢陈 ppt)

➢ 二重积分存在不能导出二次积分存在

例1 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{p}, & (x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{p}\right),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在$[0,1]\times[0,1]$上二重积分和二次积分的存在性.

解 记$D=[0,1]\times[0,1]$. 对$\forall\varepsilon>0$, $\forall\sigma>0$, 若$f(x,y)>\sigma$,

则 $(x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{p}\right)$, 且$m,p$中至少一个小于$\dfrac{2}{\sigma}$.

区间$[0,1]$中分母小于$\dfrac{2}{\sigma}$的有理数至多有限个, 设为

$r_1, r_2, \ldots, r_p$. 取$[0,1]$的分割T_x, T_y使得$\|T_x\|, \|T_y\|<\dfrac{\varepsilon}{4p}$.

令$T=\{T_x\}\cup\{T_y\}$, 得D的矩形分割. 显见f有界, 若f在

小矩形$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$上的振幅$\omega_{ij}>\sigma$, 则$D_{ij}$至少

一条边含$r_k\ (1\le k\le p)$. 由于含r_k的小区间至多$2p$个, 其

长度和不超过$2p\cdot\dfrac{\varepsilon}{4p}=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 故横边和纵边含$r_k$的小矩形

面积和都不超过$\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而总面积不超过ε, 即$f\in R(D)$.

➢ 二次积分存在不能导出二重积分存在

例2 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{m}\right),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在$[0,1]\times[0,1]$上二重积分和二次积分的存在性.

提示 对任意区间$[a,b]$和$[c,d]$, 它们必含分母相同且为素数的有理数.

(2)二重积分与二次积分的转换:

记住x,y型区域对应的转换法则，这个地方还是要在下面选一些题来讲才合适，先把教材原文贴上来自己看看:

定理 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且 $\forall x\in[a,b]$: $F(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

（称后式为先 y 后 x 的二次积分或先 y 后 x 的累次积分.）

推论 1　若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

推论 2　设 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，其中 $y_1,y_2\in C[a,b]$（如图 16.3），我们称这样的区域为 x 型区域. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且 $\forall x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 关于 y 在 $[y_1(x),y_2(x)]$ 上可积，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

设 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$，其中 $x_1,x_2\in C[c,d]$（如图 16.4），我们称这样的区域为 y 型区域. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且 $\forall y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 关于 x 在 $[x_1(y),x_2(y)]$ 上可积，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

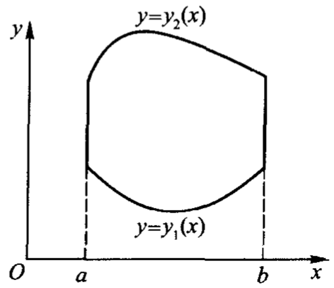


图 16.3

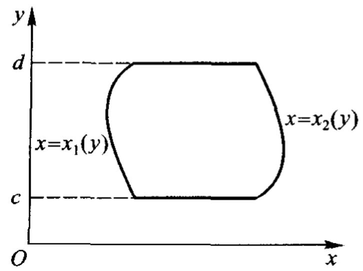


图 16.4

(3)二重积分的变量替换：

嗨嗨嗨！Jacobi 行列式又见面辣！

只需记住变量替换法则即可：

$$u=u(x,y),v=v(x,y),\text{且}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0,(x,y)\text{与}(u,v)\text{一一对应:}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

由此自然便可得到极坐标换元啦————令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

PS：题目选讲在最后

2.三重积分

三重积分的概念我感觉甚至课上都没怎么讲，只是提了一嘴可求体积区域便引出了，我想这是由于咱工科数分重视计算能力的原因吧(毕竟工科数分虽然名字叫数分，但是也要服务于后面的工科专业课，你没有高数一样的计算能力怎么行)

2.1 化三重积分为三次积分

按照牢陈的讲法有柱线法和截面法的区别，其实一言以蔽之就是把三重积分化为 1+2 还是 2+1 的形式区别而已

- 柱线法：类比为 z 型区域，笑死。即所求积的区域可以被一上一下两张曲面夹住，那么这时候就可以用柱线法。将三重积分化为一个 2+1 的形式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{def}}{=} \iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先z再y后x
三次积分

同理，你也可以先积 x 或者 y，只要满足条件即可(但是一般不会考这么抽象的)

- 截面法：即被积区域是 z 型空间区域，可以将积分化成一个 1+2 的形式后面的 2 即表示先对当 z 确定时那个截面的区域二重积分，再对 z 的取值范围再积分一次得到结果

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2}\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$
$$\overset{\text{def}}{=} \int_{h_1}^{h_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(牢陈 ppt 还是很给力的)

同理，也可以投影到 x,y 坐标轴上，只是一般考不到这么抽象

2.2 三重积分的变量替换

Jacobi，启动!

直接记公式:

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

常用的两个变换:

- 柱面变换：即极坐标变换的立体版，记

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

可得 $|J| = r$

- 球面变换：记

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi$$

可得 $|J| = \rho^2\sin\varphi$

基础知识就这么多，但是题目能给你玩出花来，下面我们便来一一讲解

Ps:今日讲座不会涉及特别难的部分，基础已然扎实者可以直接快进到明天 tygg 的压轴题讲座喵!

3.题目选讲

【1】（2021 级期中大作业第 15 题）计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+2j^2)}$.

解：考查二重积分的定义. 凑定义后直接计算即可

$$
\begin{aligned}
L&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{2j^2}{n^2}\right)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{\sqrt{2}j}{n}\right)^2\right]}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2\cdot\arctan\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

【2】（2021 级期中大作业第 26 题）.若$f(x,y)$在有界区域D上连续，且在D内任一子区域D'上有$\iint_{D'}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，判别在$D$上$f(x,y)$是否恒为零？说明理由.

解：命题正确. 理由如下：

假设存在某点(x_0,y_0)使得：$f(x_0,y_0)\neq 0$

不妨设：$f(x_0,y_0)>0$

根据函数的连续性，一定存在极小邻域

$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\in D\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\right\}$使得对于函数在邻域内恒大于 0，

从而该区域的定积分必大于 0.

这与已知条件矛盾，故原函数在定义域上恒为 0.

从而命题正确.

【3】（2021 级数分 II 期中大作业第 19 题）设$f(x,y)$在$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$上有连续偏导数，且在边界$x^2+y^2=1$上$f(x,y)=0$. 试求极限

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

解：极坐标+积分中值定理：

$$L=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1(f_x\cos\theta+f_y\sin\theta)\mathrm{d}r=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\xlongequal{\text{积分中值定理}}-\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\pi f(\xi\cos\eta,\xi\sin\eta)=-2\pi f(0,0)$$

【4】（2012 级期中考试第 8 题）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(i+j)^3}{n^5}$.

解：考查二重积分的定义. 凑定义后直接计算即可

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(i+j)^3}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{n}\right)^3=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)^3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$$

【5】（2012 级期中考试第 10 题）求极限 $\lim\limits_{R\to 0^+}\dfrac{1}{R^3}\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$.

解：利用积分中值定理即可：

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^3}\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=1\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

【6】（2016 级期中考试第 10 题）设 $\varphi(t)=\displaystyle\int_{A(t)}\frac{\mathrm{e}^x\cos y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$A(t)=\{(x,y)|t^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4t^2\}$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)$.

解：分子利用积分中值定理，然后余下极坐标换元即可：

$$\lim_{t\to 0^+}\varphi(t)=\lim_{t\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_t^{2t}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=2\pi\ln 2$$

【7】（21-22 高数大作业 T18）已知空间体 Ω 由曲面

$xy=1$, $xy=3$, $y=x$, $y=2x$, $z=xy+y^2$ $(x>0,y>0)$ 和 $z=0$ 围成，求 Ω 的体积.

解：

不管三七二十一，先作一波换元 $u=xy,v=\dfrac{y}{x},w=z\Rightarrow(u,v)\in[1,3]\times[1,2]$，计算一下雅可比行列式：

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=2v$$

然后先算 w 方向，余下是非常容易的：

$$I=\int_1^3\mathrm{d}u\int_1^2\mathrm{d}v\int_0^{u+uv}\frac{1}{2v}\mathrm{d}w=2+2\ln 2$$

【8】(21-22 数分大作业 T13) 计算积分

$\int_\Omega\left(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$和平面$z=1, z=4$围成.

解：利用一下奇偶性与轮换对称性直接得到：

$$I=\frac{1}{2}\int_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r=21\pi$$

【9】(20-21 数分荣誉期中 T11)

11. 求立体 Ω： $z\geq x^2+y^2$， $x^2+y^2+z^2\leq 6$的体积.

解：该立体是抛物面与球面相交产生的立体，计算可得交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=2\end{cases}$$

在xOy上投影为$x^2+y^2=2$，此即积分区域D，利用二重积分有

$$\begin{aligned}V&=\iint_D\left(\sqrt{6-x^2-y^2}-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\xlongequal{\text{极坐标换元}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)\mathrm{d}r\\ &=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)\mathrm{d}(r^2)=\pi\left(-\frac{2}{3}(6-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}r^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}\\ &=\left(4\sqrt{6}-\frac{22}{3}\right)\pi\end{aligned}$$

【10】(20-21 数分荣誉期中 T12)

12. 计算积分 $I=\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为直线$x+y=1$与坐标轴所围成的有界区域.

解：考虑换元

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases},\quad |J|=\frac{1}{2}$$

此时原积分区域化为$D':0\leqslant u\leqslant 1,\ -u\leqslant v\leqslant u$，代入得到：

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_{-u}^{u}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\int_0^1(u(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}))\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}$$

【11】(20-21 数分荣誉期中 T13)

13. 设$\Omega_t=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le t^2,z\ge 0\right\}$，求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^5}\iiint_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V.$$

【解】令$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi$，则

$\Omega_t':0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le\rho\le t$，于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t\sin(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\int_0^t\sin(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi}{t^5}\int_0^t\sin(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t^2)t^2}{5t^4}=\frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

【12】(20-21 数分荣誉期中 T14)

14. 设S为圆柱面$x^2+y^2=1$介于平面$z=0$和$z=1$之间的部分，计算积分

$$I=\iint_S\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}.$$

解：可取面积微元$\mathrm{d}S=2\pi\,\mathrm{d}z$，则原积分即

$$I=2\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

【13】(21-22 数分大作业 T11)

11. 交换二次积分次序：$\displaystyle\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y\quad(a>0)$.

解：画个图白给的东西

$$I=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{y^2/(2a)}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2+y^2}}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{y^2/(2a)}^{2a} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

【14】(21-22 数分大作业 T12)

12. 计算积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-2y}{x+2y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=0, y=0$ 及 $x+2y=4$ 围成的平面区域.

解：作换元 $u=x-2y, v=x+2y$，从而得到：

$$I=4\int_0^4 \mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=32\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)$$

【15】(21-22 数分大作业 T14)

14. 计算积分 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ ($R>0$)与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成含 z 轴部分有界闭区域.

解：直接球坐标系计算即可：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{7\pi R^4}{6}$$

【16】(22-23 数分荣誉 T6)

6. 极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 等于 …… (**D**)

(A) 0.　　**(B)** 1.　　**(C)** π.　　**(D)** $\frac{4\pi}{3}$.

【17】(22-23 数分荣誉 T7)

7. 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)=\left(\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{m}\right),\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中$\dfrac{n}{m},\dfrac{q}{m}$为既约分数，则$f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上的 ······（ **C** ）

(A) 二重积分和两个累次积分均存在.

(B) 二重积分和两个累次积分均不存在.

(C) 二重积分不存在，但两个累次积分均存在.

(D) 二重积分存在，但两个累次积分均不存在.

【18】(22-23 数分荣誉 T16)

13. 计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=x^2+y^2$围成的有界闭区域.

【解】由$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=x^2+y^2\end{cases}$得$x^2+y^2=1$，故$\Omega$在$xOy$面的投影区域为$x^2+y^2\le 1$，于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r(r-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{42}.\end{aligned}$$

【19】(群里问的好题)

问题

求以下包含三重积分的极限:

$$\lim_{t\to x_0+}\frac{1}{(t-x_0)^{n+4}}\iiint_{\Omega_t}(x-y)^n f(y)\,dxdydz,$$

其中Ω_t是由平面$y=x_0$，$x=t$，$z=x$，$z=y$（$0\le x_0\le t$）围成的区域内部，$f(x)$在x_0附近可微，$f(x_0)=0$.（提示：考虑积分区域投影.）

解:

$$x_0=0\Rightarrow y=0,x=t\geqslant 0,z=x,z=y$$

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_{\Omega_t}(x-y)^n f(y)\mathrm{d}V$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \mathrm{d}y\int_y^t \mathrm{d}x\int_y^x (x-y)^n f(y)\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \mathrm{d}y\int_y^t (x-y)^{n+1} f(y)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \frac{1}{n+2}\cdot(t-y)^{n+2} f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \frac{1}{n+2}\cdot y^{n+2} f(t-y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \left[\frac{1}{n+2}\cdot y^{n+2} f'(0)\,(t-y)+o((t-y))\right]\mathrm{d}y$$

$$=f'(0)\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{n+4}}\int_0^t \frac{1}{n+2}y^{n+2}(t-y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{y=t\sin^2\theta} f'(0)\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(n+2)t^{n+4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\sin^{2n+4}\theta\cdot t\cdot\cos^2\theta\cdot t\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=f'(0)\lim_{t\to 0^+}\frac{2}{(n+2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+5}\theta\cdot\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=f'(0)\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(n+2)}\mathrm{B}(n+3,2)$$

$$=f'(0)\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(n+2)}\frac{(n+2)!}{(n+4)!}$$

$$=\frac{f'(0)}{(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$$

完结撒花！祝大家在期中考试中取得好成绩!!!