2024 春学科营数分期末讲座

讲解人：张少秋

前言：

1.本讲座面向对象是修读数学分析(荣誉)**2** 的学生。

2.考试范围包括两类线面积分、函数列与函数项级数、幂级数、**Fourier** 级数，共计 **5** 章，总分 **100** 分，考试时间两小时(什么废话)。

3.从往年试题的分析情况来看，试卷结构是一如既往的填空+选择+答题，除了疫情期间出现过两次纯大题的考试。而试卷难度通常中规中矩，偶尔会在选择题或者证明题中出现一些带有一定难度的题目，但总体来看，至少 **80** 分以上的题都是属于会了就能拿分的题，这类试卷的难度属于是拿较高分不难，但若目标是满分/满绩者，则还需对各类结论/证明/做题技巧有更为深入的研究才行。

4.综上所述，本次讲座主要分为 **3** 个部分：首先，鉴于线面积分中会不可避免地用到重积分的知识，所以我们先对重积分的计算做一个简单的复习；其次，就是我们的 **17**，**18** 章，两类线面积分；最后第三部分便是我们的级数，由于数项级数不在本次考试范围之内，故历年试题中这部分题可以略过不做，但常见的级数判别敛散性的几大方法还是应该熟知，这是 **10**、**11**、**12** 章的基础所在。

5.本次讲座习题来源：往年真题、教材经典习题、往年讲座真题等

祝所有同学都能在数分期末考试中取得自己理想的成绩，为大一学年画上一个圆满的句号!

Part 0 重积分部分知识复习

一、二重积分

1.二重积分与二次积分的转换:

记住x,y型区域对应的转换法则:

定理 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积,且 $\forall x\in[a,b]$:$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 存在,则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(称后式为先 y 后 x 的二次积分或先 y 后 x 的累次积分.)

推论 1 若$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

推论 2 设 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$,其中 $y_1,y_2\in C[a,b]$(如图 16.3),我们称这样的区域为 x 型区域.若 $f(x,y)$ 在 D 上可积,且 $\forall x\in[a,b]$,$f(x,y)$关于 y 在$[y_1(x),y_2(x)]$上可积,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

设 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$,其中 $x_1,x_2\in C[c,d]$(如图 16.4),我们称这样的区域为 y 型区域.若 $f(x,y)$ 在 D 上可积,且 $\forall y\in[c,d]$,$f(x,y)$关于 x 在$[x_1(y),x_2(y)]$上可积,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

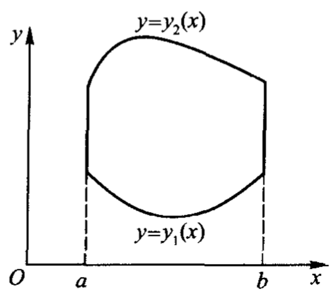


图 16.3

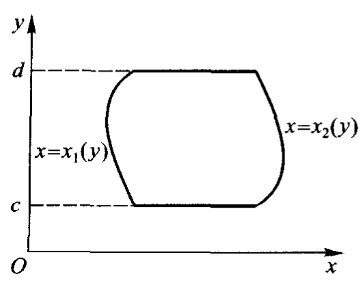


图 16.4

2.二重积分的变量替换:

只需记住变量替换法则即可:

$$u=u(x,y),v=v(x,y),\text{且}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0,(x,y)\text{与}(u,v)\text{一一对应:}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

由此自然便可得到极坐标换元——————令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

二、三重积分

1.化三重积分为三次积分

按照牢陈的讲法有柱线法和截面法的区别，其实一言以蔽之就是把三重积分化为 1+2 还是 2+1 的形式区别而已

- 柱线法：类比为 z 型区域。即所求积的区域可以被一上一下两张曲面夹住，那么这时候就可以用柱线法。将三重积分化为一个 2+1 的形式：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{def}}{=}\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

先z再y后x
三次积分

同理，你也可以先积 x 或者 y，只要满足条件即可

- 截面法：即被积区域是 z 型空间区域，可以将积分化成一个 1+2 的形式后面的 2 即表示先对当 z 确定时那个截面的区域二重积分，再对 z 的取值范围再积分一次得到结果

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{h_1}^{h_2}\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{h_1}^{h_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理，也可以投影到 x,y 坐标轴上

2.三重积分的变量替换

直接记公式:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

常用的两个变换:

- 柱面变换：即极坐标变换的立体版，记

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$$

可得 $|J|=r$

- 球面变换：记

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi$$

可得 $|J|=\rho^2\sin\varphi$

三、题目选讲

当然这部分考试是不会直接考的，主要是帮你们快速回忆一下计算

【1】(20-21 数分荣誉期中 T11)

11. 求立体 Ω：$z \ge x^2+y^2$，$x^2+y^2+z^2 \le 6$ 的体积.

解：该立体是抛物面与球面相交产生的立体，计算可得交线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$$

在xOy上投影为$x^2+y^2=2$，此即积分区域D，利用二重积分有

$$V=\iint\limits_D\left(\sqrt{6-x^2-y^2}-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标换元}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6-r^2}-r^2\right)\mathrm{d}(r^2)=\pi\left(-\frac{2}{3}(6-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\left(4\sqrt{6}-\frac{22}{3}\right)\pi$$

【2】(22-23 数分荣誉 T16)

13. 计算三重积分$I=\iiint\limits_\Omega x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=x^2+y^2$围成的有界闭区域.

【解】由$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$得$x^2+y^2=1$，故$\Omega$在$xOy$面的投影区域为$x^2+y^2\le 1$，于是

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r(r-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{42}.$$

Part 1 线面积分部分

一、第一类线面积分

1.第一类曲线积分

(1)概念理解：考虑计算线密度为$f(x,y)$的曲线l的质量，则

$$m=\int_l f(x,y)\mathrm{d}s$$

其中$\mathrm{d}s$为弧微分

(2)性质：线性性、可加性(首尾相连)、与方向无关

(3)计算方法：即只需将弧微分计算出来即可，剩余同一元函数定积分

对于平面曲线:

- 若曲线形式为$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$
- 若曲线形式为$y=f(x)$，则$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}y$
- 若曲线形式为$r=r(\theta)$，则$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$

对于空间曲线:

$$l:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases},\alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

有$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$

- 注意奇偶性与曲线方程带来的运算简便!

2.第一类曲面积分

(1)曲面面积：即如何计算$\mathrm{d}S$的问题，首先不妨考虑普通的显式平面方程

$$S:z=z(x,y),x,y\in D$$

于是有

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos(\boldsymbol{n},z)|}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将之推广到$x=x(y,z),y=y(z,x)$亦同理，进一步推广，来到双参数曲面方程

$$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$$

运用 14 章的知识同样可以得到

$$\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其中$A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$，若记

$$\begin{aligned}E&=(x_u)^2+(y_u)^2+(z_u)^2\\F&=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\G&=(x_v)^2+(y_v)^2+(z_v)^2\end{aligned}$$

便可得到简易版计算公式$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$，也即

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(2)第一类曲面积分：即考虑计算面密度$f(x,y,z)$的曲面的质量，有

$$m=\int_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

计算方法同上，如下所示：

- 若曲面形式为$z=z(x,y)$，有

$$\int_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\int_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(另两种同理)

- 若曲面形式为$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，有

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\int_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

- 注意奇偶性与曲面方程带来的运算简便!

3.题目选讲

【1】球面面积公式，球面为$x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$

解：由题意$z_x=-\dfrac{x}{z},z_y=-\dfrac{y}{z}$，故

$$\mathrm{d}S=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用对称性及球面坐标换元即可得

$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,\mathrm{d}r=4\pi R^2$$

【2】（20级考试真题）计算积分$\int_{x^2+y^2+z^2=1}[(x-y)^2+3z^2]\mathrm{d}S$.

解：

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2=1}[(x-y)^2+3z^2]\mathrm{d}S&=\int_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+3z^2)\mathrm{d}S\\&=\frac{5}{3}\int_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S\\&=\frac{5}{3}\int_{x^2+y^2+z^2=1}\mathrm{d}S\\&=\frac{5}{3}\times 4\pi\\&=\frac{20\pi}{3}\end{aligned}$$

【3】（某年考试真题）已知曲面$\Sigma=\{(x,y,z):x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，求

第一类曲面积分$\int_{\Sigma}(2\pi x+5y^2)\mathrm{d}S$.

解：注意下轮换对称，从而减小计算量（当然直接计算计算量也不大）：

$$\begin{aligned}
I&=\frac{2}{3}\int_{\Sigma}\pi(x+y+z)\mathrm{d}S+\int_{\Sigma}5x^2\mathrm{d}S\\
&=\frac{2\pi}{3}\int_{\Sigma}\mathrm{d}S+\int_{\Sigma}5x^2\mathrm{d}S\\
&=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\int_{x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sqrt{3}\int_{x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0}5x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}5x^2\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\int_0^1 5x^2(1-x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{(4\pi+5)\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$

【4】(19-20 数分期末 T3)

三、计算积分$\iint\limits_S x^4z\mathrm{d}S$，其中$S$为圆柱面$x^2+y^2=1$介于$z=0$和$z=2$之间部分.

解：

这个图不太好看，我们考虑对坐标轴轮换一次，从而该题变为：计算积分$\int_S y^4x\,\mathrm{d}S$，其中S为圆柱面$y^2+z^2=1$介于$x=0$和$x=2$之间部分. 注意到上下是对称的，从而只需要算上半部分，然后利用投影$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$，即可计算得到：

$$I=\int_{-1}^1\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\int_0^2 x\,\mathrm{d}x\xlongequal{y=\sin\theta}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot 2=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

【5】(21-22 数分期末 T2)

二、设空间曲线$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$,计算曲线积分$\int_L(x+y-2z)^2\mathrm{d}s$.

解：这是利用曲线方程和轮换对称性简化计算量的经典例子

【解】首先L是半径为1的大圆周，根据对称性有

$$\int_L x^2 \mathrm{d}s=\int_L y^2 \mathrm{d}s=\int_L z^2 \mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L 1\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}$$

其次

$$\int_L xy\mathrm{d}s=\int_L yz\mathrm{d}s=\int_L zx\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{6}\int_L\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\int_L(-1)\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}$$

于是

$$\int_L (x+y-2z)^2\mathrm{d}s=\int_L\left[(x^2+y^2+4z^2)+2xy-4zx-4yz\right]\mathrm{d}s$$

$$=6\int_L x^2\mathrm{d}s-6\int_L xy\mathrm{d}s=6\pi$$

【6】(22-23 数分期末 T12)

12． 求曲线积分 $I_1=\oint_L |y|\,\mathrm{d}s$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$．

解:

【解】L的极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos 2\theta,\quad \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right].$$

又因为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{a^2\cos 2\theta+\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta$$

并根据对称性有

$$I_1=\oint_L |y|\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\cdot\frac{a^2}{r}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=4a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

二、第二类线面积分

1.第二类线面积分的概念

(1)第二类曲线积分：即变力做功：

$$\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{F}\cdot \tau \,\mathrm{d}s$$

其中$\tau = (\cos\alpha, \cos\beta)$为曲线的切向量，若$F = (P, Q)$，则第二类曲线积分即为

$$\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

其中$\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x, \cos\beta\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}y$，即$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \tau\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$

如何计算？直接代入曲线形式即可，注意第二类曲线积分是定向的：

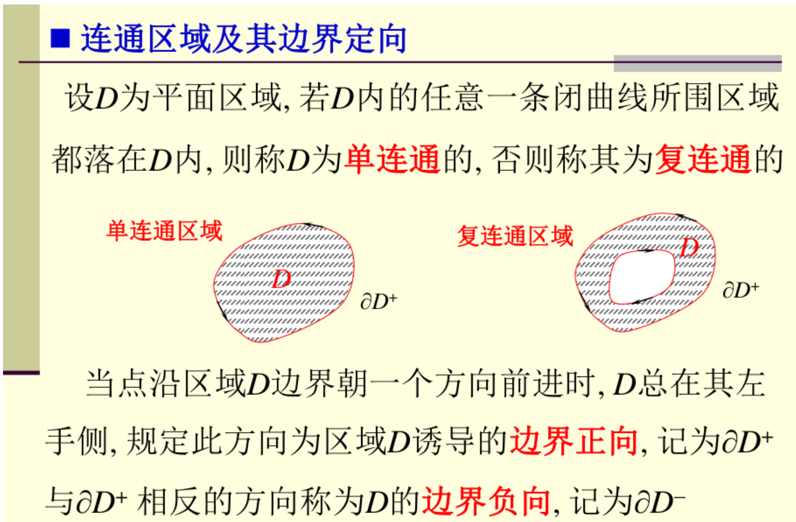
- 若曲线形式为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，且积分起点和终点分别对应$\alpha, \beta$，则

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(t)x'(t)\,\mathrm{d}t + Q(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$

- 若曲线形式为$y = y(x), a < x < b$，且积分起点和终点分别对应a, b，则

$$I = \int_{a}^{b} (P(x) + Q(x)y'(x))\,\mathrm{d}x$$

补充：平面曲线的定向：



(2)第二类曲面积分:即计算平面的通量:

$$\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

其中$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为曲面单位法向量，故有$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

如何计算？注意到$\mathrm{d}\boldsymbol{S}//\boldsymbol{n}//\nabla F$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{F_x}=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{F_y}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{F_z}$$

由此即可将曲面S投影到便于计算的坐标面进行计算

- 若曲面为双参数形式$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，则利用 Jacobi 行列式也可得

$$\int_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\int_{D_{uv}}(PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

这里的A,B,C和上文意思一样

- 合一投影法：即$\dfrac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{F_x}=\dfrac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{F_y}=\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{F_z}$的简化版：若曲面形式为

  $z=z(x,y),x,y\in D_{xy}$，则

$$\int_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm\int_{D_{xy}}(-Pz_x-Qz_y+R)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注意曲面的定侧！不要把正负号搞反了

2.三大公式(Green,Gauss,Stokes)

(1)Green 公式：分为切向量和法向量形式，但后者不考

- 定理条件：设$\boldsymbol{F}=(P,Q)$为**平面有界闭域**D上的**光滑向量场**，且D边界**分段光滑**
- 适用对象：第二类曲线积分，且积分路径为某有界闭域的边界

- 定理形式(切向量)：

$$\int_{\partial D^+} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\partial D^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(法向量形式即$\int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}s$，做了解即可)

- 解题注意——挖洞法：即若被积区域D内包含使得被积函数无意义的**奇点**，则通常采取在积分区域中心挖洞的形式来避开奇点，后面习题讲解的时候会讲到
- 平面上的第二类曲线积分与路径无关的条件(这里我直接抄 ppt 了)：

定理(Green) 设 $\boldsymbol{v} = (P(x,y), Q(x,y))$是单连通区域$D$内的光滑向量场，则下面四条等价：

(1) 在D内的任一条分段光滑**闭曲线**L上

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

(2) 在D内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ **与路径无关**

(3) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$是某函数$\varphi(x,y)$的**全微分**，即$\exists\varphi$使得 $\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$，此时称$\varphi$是$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的**原函数**

(4) 在D内恒成立 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$

由此还可以引申全微分方程，但历年来均未考过，因此今天讲座不讲，但是该部分内容不难，诸位自己看看书便可

事实上，Green 公式的切向量形式即为 Stokes 公式的低维形式，法向量形式即为 Gauss 公式的低维形式

(2)Gauss 公式：阐释了三重积分与其积分区域边界的第二类曲面积分的关系

- 定理条件：设$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$是**空间有界闭域**Ω**上的**光滑向量场，$\partial\Omega$是**分片光滑的闭曲面**
- 适用对象：对某空间有界闭域边界上积分的第二类曲面积分
- 定理形式：

$$\int_{\partial V^+}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{\partial V^+}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_V(P_x+Q_y+R_z)\mathrm{d}V$$

- 常用解题手段：补面法，挖洞法，其中挖洞法同上，而补面法即在被积区域上补上某些面使得该区域成为一个完整的封闭区域，然后用 Gauss 公式
- 散度：定义为$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z$，故 Gauss 公式也可表示为

$$\int\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int\nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V=\int\mathrm{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}$$

(3)Stokes 公式：即 Green 公式的升级版，刻画了第二类曲线积分与第二类曲面积分在某些条件下的关系

- 定理条件：设$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$为光滑空间曲面上S上的**光滑向量场**，且∂S为**分段光滑闭曲线**
- 定理形式：(可借助行列式便于记忆，或者直接记忆$\nabla\times\boldsymbol{F}$)

$$\int_{\partial S}P\,\mathrm{d}s+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

其中曲线定侧与曲面定向由右手螺旋准则决定

- 旋度：定义为$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}$，故 Stokes 公式也可表示为

$$\int_{\partial S}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_S\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- 空间中第二类曲线积分和路径无关的条件：即要么存在函数u，使得

$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$；要么$\nabla\times\boldsymbol{F}=\vec{0}$

3.题目选讲

【1】（某年考试真题）已知曲面$\varSigma$: $x^2+y^2+z^2=8\left(z\geqslant\sqrt{3}\right)$方向取上侧，求第二类曲面积分$\int_{\varSigma}2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+5z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

解：记$F=x^2+y^2+z^2-8$，从而有：

$$\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{2x}=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{2y}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2z}$$

从而得到：

$$\begin{aligned}\int_{\varSigma}2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+5z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{\varSigma}\left(2xy\cdot\frac{x}{z}-y^2\frac{y}{z}+5z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\varSigma}5(8-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_{x^2+y^2\leqslant5}5(8-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{5}}5(8-r^2)r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{275\pi}{2}\end{aligned}$$

【2】（某年考试真题）设曲面S是$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$落在圆柱面$x^2+y^2=2$内的部分，定向为下侧，求第二类曲面积分$\int_S 3\sqrt{2}\,xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+10\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解：记$F=x^2+y^2+z^2-2$，从而有：

$$\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{2x}=\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{2y}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2z}$$

从而得到：

$$
\begin{aligned}
\int_S 3\sqrt{2}\,xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+10\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_S\left(3\sqrt{2}\,xz\cdot\frac{x}{z}+10\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_S\left[\frac{3\sqrt{2}\,(x^2+y^2)}{2}+10\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{3\sqrt{2}\,r^2}{2}\cdot r\,\mathrm{d}r-10\cdot 2\pi\\
&=-20\pi-3\sqrt{2}\,\pi
\end{aligned}
$$

【3】（网传题）设平面曲线C是圆周$x^2+y^2=1$的逆时针方向，求曲线积分

$$\int_C \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y\right].$$

解：一些挖洞基本操作：

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y\\
&=\oint_{C\cup\{x^2+y^2+\varepsilon^2\}^-} f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y\ +\oint_{\{x^2+y^2=\varepsilon^2\}} f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y\\
&\overset{\text{Green}}{=\!=}\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y\right]\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\mathrm{e}^y\left[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y\right]\\
&\overset{\text{Green}}{=\!=}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2}-\mathrm{e}^y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=\!=}\frac{-\mathrm{e}^\eta\cos\xi\cdot\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\\
&\overset{\varepsilon\to 0}{=\!=}-\pi
\end{aligned}
$$

【4】（某年考试真题）计算曲面积分$\displaystyle\int_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+9z^2)^{3/2}}$，其中：

(i) 曲面S是不含原点的任一封闭曲面的外侧；

(ii) 曲面S是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧；

解：经典的扣点.

(i)内部无奇点，直接高斯定理爆算一波，得到结果为 0.

(ii)挖掉一个$x^2+4y^2+9z^2=\varepsilon^2(\varepsilon\to0^+)$的小椭球，椭球外高斯定理为0，椭球内将分母从积分中拿出来，再高斯定理：

$$I=\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{x^2+4y^2+9z^2=\varepsilon^2}(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\xlongequal{\text{Gauss}}\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

【5】(19-20 数分期末 T1)

一、判断题(每小题 5 分)

(1) 设L_1和L_2分别是起点为$A(-1,0)$，终点为$B(1,0)$的上半圆周$y=\sqrt{1-x^2}$和下半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$. 由于$\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)'_x$，故有曲线积分

$$\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

解:

(1) 错误：两条半圆周所构成的内部区域含有奇点，故格林公式不成立，故结果不对.

【6】(19-20 数分期末 T2)

二、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}8xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-(4y-1)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是旋转抛物面$z=x^2+y^2,(0\le z\le1)$，取下侧.

解:

考虑高斯公式补面，默认以下的$\{z=1\}\xlongequal{\text{def}}\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant1,z=1\}$均为上侧：

$$\begin{aligned}I&=\int_{S\cup\{z=1\}-\{z=1\}}(8xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-(4y-1)\,z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\\&\xlongequal{\text{Gauss}}\int_V(8y-4y-(4y-1))\mathrm{d}V+\int_{\{z=1\}}(4y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\pi z\,\mathrm{d}z-\pi\\&=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

【7】(19-20 数分期末 T9)

九、设 B 是椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 的上半部分 $z\geq 0$，$\boldsymbol{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 B 的单位外法向量. 计算曲面积分

$$\iint_B z\left(\frac{x\cos\alpha}{4}+\frac{y\cos\beta}{4}+\frac{z\cos\gamma}{9}\right)\mathrm{d}S.$$

解:

转化为通量积分，然后利用高斯公式求解即可：

$$I=\int_{\Sigma}\frac{xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{4}+\frac{z^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{9}\overset{\text{Gauss}}{=\!=\!=}\int_V\left(\frac{z+z}{4}+\frac{2z}{9}\right)\mathrm{d}V=0$$

【8】(21-22 数分期末 T3)

三、计算曲线积分 $\int_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(1) C 为从点 $A(-1,0)$ 沿上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(1,0)$；

(2) C 为从点 $A(-1,0)$ 沿抛物线 $y=4-(x-1)^2$ 到点 $B(3,0)$.

【解】(1) 由 $C:x=\cos t, y=\sin t, t:\pi\to 0$，有

$$\int_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_\pi^0\frac{-\sin t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\pi.$$

(2) 由于 $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y$，故原曲线积分在上半平面内与路径无关.

更换路径为从 $A(-1,0)$ 到 $D(1,0)$ 的上半圆周，再沿 x 轴到 $B(3,0)$，则由(1)有

$$\int_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{AD}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{\overline{DB}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=-\pi+\int_{\overline{DB}}\frac{-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\pi+\int_1^3\frac{-0\mathrm{d}x}{x^2+0^2}=-\pi.$$

【9】(22-23 数分期末 T2)

2. 已知曲线积分 $\int_C \frac{ay\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 在 $\{(x,y)|x+y>0\}$ 内与路径无关，则常数 $a =$_____.

答案：$a=-1$

【10】(22-23 数分期末 T4)

4. 设 C 是平面上任意一条环绕原点的正向光滑闭曲线，则 $\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} =$______.

答案：π

【11】(22-23 数分期末 T7)

7. 设曲面 S 为 $x^2+y^2+z^2=1\,(z\geq 0)$ 的上侧, S_1 为 S 位于第一卦限部分,则（　　）

(A) $\iint_S x\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　**(B)** $\iint_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

(C) $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.　　**(D)** $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\iint_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

答案：C

【12】(22-23 数分期末 T13)

13. 求曲面积分 $I_2 = \iint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=5-x^2-y^2,(z\geq 1)$ 部分，取上侧.

【解】添加平面 $\Sigma_0: z=1,\ \ (x,y)\in D$，其中 $D: x^2+y^2\leq 4$，取下侧，它与 Σ 围成空间有界闭域 Ω，则由 Gauss 公式有

$$I_2 = \left(\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0}\right) y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (y+x)\mathrm{d}V - \iint\limits_{\Sigma_0} (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0 - \left(-\iint\limits_{D} (y^2+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) = \iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r = 4\pi$$

【13】(18.4 课后习题)

【4】设S是有界区域V的光滑边界曲面，函数$u\in C^2(V\cup S)$，记

$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$，证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V \left((u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iiint\limits_V u\,\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$为$u$沿曲面$S$外单位法向量$\boldsymbol{n}$的方向导数

证明：注意到:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(1) 利用高斯公式:

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V$$

令$\boldsymbol{f}=\nabla u$，命题即可得证.

(2) 令$\boldsymbol{f}=u\nabla u$，命题即可得证.

Part 2 级数部分

〇、常见级数敛散性判别法复习

虽然本次考试第九章不直接考察，但常见的几种级数的敛散性判别法是不能忘记的，这在第十章以及第十一章均会大量用到！

1.比较判别法

适用于正项级数，简记：大收必小收，小散必大散

极限形式中，记$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$，若

(1)$l=0$则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

(2)$l=+\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散

(3)$0<l<+\infty$，二者同敛散

2.根值判别法(Cauchy)

适用于正项级数记$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n)^{\frac{1}{n}}=r$，若$r>1$，级数发散，若$r<1$，级数收敛

3.比值判别法(D’Alembert)

适用于正项级数

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$，则级数收敛；若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$，则级数发散

4.积分判别法

适用于正项级数

若$f(x)$在$x\geqslant1$时非负且单调递减，记$a_n=f(n)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同敛散，这里的经典例子就是$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

5.A-D 判别法

(1)Abel：若$\{a_n\}$单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

(2)Dirichlet：若$\{a_n\}$单调收敛到0，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和有界，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

一、函数列与函数项级数

前言：虽然叫这个名字，但是事实上这一章主要讲的是关于一致收敛相关的证明、判别、与性质。所以这一章我不打算按照课本上挤香肠的顺序来为大家复习，而是以更有利于大家复习的方式将知识点给大家过一遍，并最后讲解试题。

1.一致收敛的定义

(1)点态收敛：即函数列$\{f_n(x)\}$在x取某个固定的值的时候该函数列在$n \to \infty$时收敛，所有收敛时对应的x的值的集合即为收敛域，收敛得到的函数为极限函数，记作

$$f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$$

例如：设$f(x)_n = x^n, x \in [0,1]$，则其极限函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

(2)一致收敛：相当于任取ε，对所有的x，有一个共同的N，只要$n > N$，便有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，这便是所谓“一致收敛”的由来，记作

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$$

例如：还是设$f_n(x) = x^n$，但是这一次$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，于是有$f(x) = 0$，且

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0$$

故原函数在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上一致收敛到$0$

(3)关于函数项级数：即相当于这时候的$f_n(x)$为部分和函数$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$

且极限函数即为和函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$(前提是收敛)

(4)关于内闭一致收敛：若对于任意闭区间$I\in D$，$f_n(x)$均一致收敛到$f(x)$，则称$f_n(x)$在D上内闭一致收敛

2.一致收敛的判别法

一共有七种，我们一种一种讲：

(1)定义判别法：即先求出极限函数，再利用不等式放缩，进而将表达式中的x放缩掉，且剩下的部分应当是趋于0的，进而实现证明

(2)确界极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

(3)Cauchy 一致收敛准则：

$$\forall n>N,\forall p\in N,\forall x\in D:|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(4)M判别法：适用于函数项级数，即若存在M_n，使得$|u_n(x)|\leqslant M_n$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，则原函数项级数**绝对一致收敛**

(备注：绝对一致收敛不意味着绝对收敛加一致收敛)

(5)$A-D$判别法：实际上是两种判别法的统称，对于函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$，若满足下列两组条件之一，则该级数一致收敛：

(Abel) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛，$\{b_n(x)\}$ 单调且一致有界

(Dirichlet) $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ 一致收敛，$\{b_n(x)\}$ 单调且一致收敛到 0

(6)Dini 定理：即连续性定理的反向表述，设函数列 $\{f_n(x)\}, x \in [a,b]$，若满足：

- $f_n \in C[a,b]$
- 对每个 x，$f_n(x)$ 单调
- $\{f_n(x)\}$ 点态收敛到 $f(x)$
- $f \in C[a,b]$

则 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$

对于函数项级数，只需要求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为同号级数即可

(7)一个二级推论：若 $f_n(x) \in C(a,b)$，且于 (a,b) 上一致收敛，则亦于 $[a,b]$ 上一致收敛

补充：当极限函数(和函数)难求出具体表达式的时候，常用 Cauchy；若可以求出，则通常使用确界极限或定义放缩；对于函数项级数，若 M 判别法和 A-D 判别法走不通，则可以试试 Cauchy；Dini 定理很少用到，但也需要作了解

3.非一致收敛的判别法

一共有七种方法，其中除了第一种之外都很常见

(1)必要条件：若不点态收敛，则必不一致收敛

(2)点列极限(最常用)：$\exists \{x_n\} \in D$，使得

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \nrightarrow 0$$

(3)Cauchy 不一致收敛准则：

$$\exists n>N, \exists p\in\mathbb{N}, \exists x\in D, |f_{n+p}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$$

这个方法在函数项级数的判定不一致收敛时经常用到，但是要注意下标n,k之间的区别，要记住在一次求和的过程中x的值是不变的

(4)确界极限：即若$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\neq 0$，则不一致收敛

(5)一个二级结论(常用来秒杀选填题)：若$u_n(x)\in C[a,b)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$发散，则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上必定不一致收敛

(6)函数项级数一致收敛的必要条件：若$u_n(x)$不一致收敛到0，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$也不一致收敛

(7)连续性定理逆否命题：若$f_n(x)\in C(D)$，但$f(x)\notin C(D)$，则$\{f_n(x)\}$不一致收敛(函数项级数的版本同理可得)

4.一致收敛的性质

主要就是三大定理，然后以及其在函数项级数中的对应版本，常考点是对于一致收敛与内闭一致收敛的理解

(1)连续性定理：若$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛(或内闭一致收敛)到$f(x)$，且$f_n\in C(D)$，则$f\in C(D)$

(2)积分号下求极限定理：若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$，且$f_n\in C(D)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

对应的函数项级数版本为“逐项求积性”：

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

(3)微分号下求极限定理：若$\{f_n(x)\}$在区间D上点态收敛于$f(x)$，且$f_n{}' \in C(D)$，$\{f_n{}'(x)\}$在D上一致收敛(或内闭一致收敛)，则$f'(x) \in C(D)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right) = f'(x)$$

对应的函数项级数版本叫做“逐项求导性”：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$$

对于第十章来说，这一块单独考察主要还是结合一致收敛的判别一起出成为大题考察，而这些定理，尤其是后两个，在后两章将会得到大量的应用

5.题目选讲

【1】(课本题)

【14】设$f(x)$在$\mathbb{R}$上不恒为0且任意阶可导，且满足条件

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

证明：$\{f^{(n)}(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛于$F(x) = c\,\mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$

证明：由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，于是由 Cauchy 收敛准则：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, p \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

也即$|f^{(n+p)}(x) - f^{(n)}(x)| = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} < \varepsilon$，于是得到$\{f^{(n)}(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛

设极限函数为$F(x)$，由$f(x)$任意阶可导即得$f^{(n)}(x) \in C(\mathbb{R})$，且函数列$\{(f^{(n)}(x))'\}$同样一致收敛，于是由微分号下取极限定理即得：

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = F(x)$$

由$F(x)$不恒为0可解出：

$$F(x) = c\,\mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

【2】(课本题)

【12】设函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上满足条件：存在$K>0$，使得

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant K|x-y|,\quad x,y\in[a,b],\quad n=1,2,\ldots$$

且在$[a,b]$上$f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$.证明：$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$

证明:

Step 1：先证明$f_n\in U.C[a,b]$：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{K},\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta$，

有$|f_n(x')-f_n(x'')|\leqslant K|x'-x''|<\varepsilon$，即得$f_n(x)\in U.C[a,b]$

Step 2：证明$f\in U.C[a,b]$：对不等式两边同时令$n\to\infty$，即得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$$

同理可得$f(x)\in U.C[a,b]$

Step 3：证明$f_n(x)\rightrightarrows f(x),x\in[a,b]$：由$f_n,f\in U.C[a,b]$可得$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$对

于$\forall x',x''\in[a,b],|x'-x''|<\delta$，有$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3},|f_n(x')-f_n(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3}$

对$[a,b]$等分使得相邻分点的间距小于$\dfrac{\delta}{3}$，同时对于所有的分点，由点态收敛可

得$\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,|f_n(x_i)-f(x_i)|<\dfrac{\varepsilon}{3}(i=0,1,2\ldots)$

于是$\forall x\in[a,b]$，设$x\in[x_i,x_{i+1}]$，有:

$$\begin{aligned}&|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即证$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$

备注：以下的所有题均来自历年真题，故省略标注出处

【3】

2. 函数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}, x\in(0,+\infty)$ 的极限函数为________，$\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 内________收敛于 $f(x)$.(注：后一空填“一致”或“不一致”)

2. 解：极限函数：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\frac{1}{n}+nx^2}=0$. 只需取 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 即可知其不一致收敛.

【4】

6. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是 ……【　　】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}, x\in(0,+\infty)$.　　**(B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x)^n}, x\in(0,+\infty)$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}, x\in(0,\pi]$.　　**(D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{x^2+n^2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 解：A. 取 $x=\dfrac{1}{n}$，通项不趋于 0；

B. 考虑柯西收敛准则：

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}\right|=x\cdot\frac{\frac{1}{(1+x)^N}}{1-\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{(1+x)^{N-1}}\overset{x=\frac{1}{N}}{=\!=}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}}\to\frac{1}{\mathrm{e}}$$

从而原函数项级数不一致收敛.

C. 熟知这是 $\dfrac{\pi-x}{2}$ 以 $(0,\pi]$ 为基础，在奇延拓操作下的正弦展开，其在 $x=0$ 处间断，故可以猜想其不一致收敛.

若一致收敛，则其收敛函数也连续，从而延拓的函数在 $x=0$ 处连续，矛盾！这是因为：

若一致收敛，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意的 $n\geqslant N$，均有（不妨直接取 N ）：

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}-\frac{\pi-x}{2}\right|\leqslant\varepsilon, \forall x\in(0,\pi]$$

取 $x\to0^+$ 得到：

$$\left|\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

矛盾！

D. 注意到 $\left|\dfrac{\cos nx}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，从而由 Weierstrass 判别法知函数项级数一致收敛.

【5】

16. 设 $f(x)=\sum_{n=2}\frac{1}{n(\ln n)^x}$， $x\in(1,+\infty)$.

(1) 证明：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内不一致收敛；

(2) 证明： $f\in C(1,+\infty)$.

解:

(1)$x=1$ 喵了

(2)利用 M 判别法结合内闭一致收敛收敛即证

【6】

$n=0$ $n=1$

9. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是 ……【 】

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}, x\in[0,+\infty)$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}, x\in(0,\pi)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x\mathrm{e}^{-nx^2}$， $x\in(0,+\infty)$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$， $x\in(1,+\infty)$.

解:

A. 注意到:

$$\sum_{j=N}^{\infty}\frac{\frac{1}{N}}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^j}=\frac{1}{N}\cdot\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{N}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}}\rightarrow\frac{1}{\mathrm{e}}\,(N\rightarrow\infty)$$

从而原函数项级数不一致收敛.

B. 注意到$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，从而由优级数判别法知，原函数项级数一致收敛；

C. 取$x=\frac{1}{\sqrt{n}}$，从而通项不一致趋于 0，从而不一致收敛；

D. 注意到:

$$\left|\frac{1}{n^{1+1/n}}+\frac{1}{(n+1)^{1+1/n}}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^{1+1/n}}\right|\geqslant\frac{n}{(2n)^{1+1/n}}\rightarrow 1$$

从而原函数项级数不一致收敛.

综上，该题选 B.

【7】

16. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域 D；

(2) 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 D 内不一致收敛；

(3) 证明：$f(x)$ 在 D 内连续.

解：

（1）$x>0$ 时，由Leibniz 判别法知级数收敛；$x\leqslant 0$ 时，通项不趋于 0，从而发散.

综上，$D=(0,\infty)$.

（2）取 $x=\frac{1}{n}$，通项不一致趋于 0，从而不一致收敛；

（3）对于任意的固定点 $x_0\in D$，必然存在闭区间 $[a,b]\subset(0,\infty)$，使得 $x_0\in(a,b)$.

考虑闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的连续性. 只需注意到此时 $\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^n$ 一致有界，且 $\frac{1}{n^x}$ 单调递减一致趋于 0，从而根据AD 判别法知，$f(x)$ 一致收敛，且通项函数也是收敛的，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，又因为 x_0 是任取的，从而 $f(x)\in C(0,\infty)$.

另解：只需证明内闭一致收敛，不妨取 $[a,b]\subset(0,\infty)$. 从而注意到 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{n^{a/2}}$ 一致收敛且 $\frac{1}{n^{x-a/2}}$ 单调且一致收敛到 0，从而根据 AD 审敛法，原函数项级数内闭一致收敛.

【8】

17. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足：存在常数 $M>0$，使得对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，有

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\le M$$

证明：**(1)** 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\left|f(x)-\frac{f(nx)}{n}\right|\le M$；

(2) 函数列 $\left\{\frac{f(nx)}{n}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛；

(3) 存在常数 a 使得 $|f(x)-ax|\le M$.

证明：

（1）取 $y=kx,k=1,2,\cdots,n$ 则有：

$$|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|\leqslant M,k=1,2,\cdots,n$$

从而有：

$$\left|f(x)-\frac{f(nx)}{n}\right|=\frac{|nf(x)-f(nx)|}{n}\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}|f((k+1)x)-f(kx)-f(x)|}{n}\leqslant\frac{n-1}{n}M<M$$

（2）考虑柯西收敛准则，对于任意的$m<n$，均有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|&\leqslant\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(mnx)}{mn}\right|+\left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(nx)}{n}\right|\\&=\frac{1}{m}\left|f(mx)-\frac{f(mnx)}{n}\right|+\frac{1}{n}\left|\frac{f(mnx)}{m}-f(nx)\right|\\&\leqslant\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)M\to\infty(m\to\infty)\end{aligned}$$

从而命题成立；

（3）盲猜一波柯西方程. 一致收敛可以干嘛呢？保证收敛的函数也是连续的！(毕竟题干就给了一个连续的条件)，从而记$\frac{f(nx)}{n}\rightrightarrows g(x),n\to\infty$，利用题干所给式子强凑呗：

$$\left|\frac{f(n(x+y))}{n}-\frac{f(nx)}{n}-\frac{f(ny)}{n}\right|<\frac{M}{n}$$

两边同时取$n\to\infty$得到：

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

由连续性即可保证其只有唯一解$g(x)=g(1)x$. 从而于第(1)小问结论中，两边同时取$n\to\infty$即可得到：

$$|f(x)-g(x)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)-g(1)x|\leqslant M\xRightarrow{a\overset{\text{def}}{=\!=}g(1)}|f(x)-ax|\leqslant M$$

综上，命题得证.

【9】

8. 已知函数列$\{u_n(x)\}$在区间$[a,b]$上定义，考虑以下命题，则 …… 【　　】

(I) 若$\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_n)$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上必不一致收敛.

(II) 若$\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)\neq0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上必不一致收敛.

(A) **I** 正确，**II** 不正确.　　**(B)** **I** 不正确，**II** 正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确.　　**(D)** **I** 和 **II** 都不正确.

解：

(I) 不妨设$x\in[0,1]$，考虑如下反例：记$Q=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$

$$u_n=\begin{cases} x, & x\in\frac{1}{n}\cup\left(\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]-Q\right) \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

则有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=x,\forall x\in[0,1]$，且存在$x_n=\frac{1}{n}$，使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$发散，但是：

$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\frac{1}{n+1},\forall p\in\mathbb{N}$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛.

(II) 显然正确. 考虑反证法，若一致收敛，则对于任意的$\varepsilon=\frac{\left|\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|}{2}>0$，均存在$N\in\mathbb{N}$，

对于任意的$n>N$，均有：

$$|u_n(x)|<\varepsilon,\forall x\in[a,b]$$

取$x=x_n$，并两边同时取极限得到：

$$\left|\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|\leqslant\frac{\left|\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|}{2}\Rightarrow\left|\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)=0$$

矛盾！综上，该题选 B.

【10】

9. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是 ……【 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n^3+x}},\quad x\in(0,+\infty)$.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+n^2},\quad x\in(0,+\infty)$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x\mathrm{e}^{-nx^2},\quad x\in(0,+\infty)$.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x},\quad x\in(0,+\infty)$.

解：

A. $\left|\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^3+x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$，由 Weierstrass 判别法知，原函数项级数一致收敛；

B. 考虑反证法，若一致收敛，利用柯西收敛准则，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得对于任意的$n>N$，均有：

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{x+n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{x}}{x+(n+p)^2}\right|<\varepsilon, \forall x\in(0,\infty), \forall p\in\mathbb{N}$$

注意到：

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{x+n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{x}}{x+(n+p)^2}\right| \geqslant \frac{p\sqrt{x}}{x+n^2} \overset{p=n}{=\!=} \frac{n\sqrt{x}}{x+n^2} \overset{x=n^2}{=\!=} \frac{1}{2}$$

矛盾！

C. 考虑反证法，若一致收敛，根据柯西收敛准则，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，均有：

$$\left|\sqrt{n}\,x\mathrm{e}^{-nx^2}\right|<\varepsilon$$

取$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，即可导出矛盾！

D. 考虑反证法，若一致收敛，根据柯西收敛准则，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，均有：

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^x}\right|<\varepsilon, \forall x\in(0,\infty)$$

取$x=\dfrac{1}{n}$，并两边同时取极限$n\to\infty$，即可导出矛盾！

【11】

16. 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域 D；

(2) 证明：$f(x)$ 在 D 内连续；

(3) 证明：$f'(x)$ 在 D 内连续，且 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$.

解：

逐点判断，利用连续和求导是局部性质，或许可以考虑内闭一致收敛.

(1) 对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$\arctan\dfrac{x}{\sqrt{n}}$关于$n$单调趋于 0，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$收敛，从而根据 AD 判别法知级数收敛；

(2) 对于任意的$x\in\mathbb{R}$，考虑内闭一致收敛$[-|x|-1,|x|+1]\overset{\text{def}}{=\!=}[-M,M]$. 注意到

$$\left|\arctan\frac{x}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{M}{\sqrt{n}}\rightrightarrows 0(n\to\infty)$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$一致收敛，从而$f(x)$在$[-M,M]$上一致收敛，又因为函数项是连续的，从而$f(x)$在$x$处连续，从而$f(x)$在定义域内连续.

(3) 只需证明逐项求导后的函数项级数内闭一致收敛，也即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$一致收敛. 对于任意的$M>0$，对于任意的$x\in[-M,M]$，只需注意到：$\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}$一致有界，且$\dfrac{1}{n+x^2}$单调一致收敛于 0，从而根据 AD 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$一致收敛，从而$f'(x)$在$x$处连续，且

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$.

【12】

(2) 设函数列$\{f_n(x)\}$在D上恒不为零，且一致收敛于函数$f(x)$，则$f(x)$在D上也必定恒不为零.

错误：考虑如下函数列$f_n(x)=\dfrac{1}{n},x\in[0,1]$满足题意，且一致收敛于$f(x)\equiv 0,x\in[0,1]$.

【13】

五、设$f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^x\ln n}$.

(1) 求$f(x)$的定义域D；

(2) 判断$f(x)$在D内的连续性，并说明理由.

解：

(1) 易知$D=(1,\infty)$. 这是因为$x>1$时，有$\frac{1}{n^x\ln n}\leqslant\frac{1}{n^x}$；$x\leqslant 1$时有$\frac{1}{n^x\ln x}\geqslant\frac{1}{n\ln n}$. 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$绝对收敛；$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\sim\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$发散.

(2) 处处连续，因为闭一致收敛. 对于固定的$x_0\in(1,\infty)$，考虑区间

$$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(1,\infty),\ \delta=\frac{x_0-1}{2}$$

则恒有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x\ln x}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0-\delta}}<\infty$$

从而函数列一致收敛，且部分和函数也是连续的，从而$f(x)$在$x=x_0$处连续. 由x_0的任意性知，$f(x)$在D内连续.

【14】

六、设二元函数$K(x,y)\in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$，（$a<b$）. 设$u_0(x)\in C[a,b]$，

$$u_n(x)=\int_a^x K(x,y)u_{n-1}(y)\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b],\quad n=1,2,\cdots$$

证明：函数列在$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证明：

注意到：

$$u_n(x)=u_0+\sum_{n=1}^{n}[u_n(x)-u_{n-1}(x)]$$

记$M=\max\{|u_0|,|u_1-u_0|\},N=\max|K(x,y)|$. 从而有：

$$|u_2(x)-u_1|\leqslant(x-a)MN\leqslant(b-a)MN$$

$$|u_3(x)-u_2|\leqslant\int_a^x N(x-a)\,(MN)\mathrm{d}x=\frac{(x-a)^2N^2M}{2}\leqslant\frac{[(b-a)N]^2M}{2}$$

$$\cdots$$

$$|u_{n+1}-u_n|\leqslant\int_a^x N\frac{(x-a)^{n-1}N^{n-1}M}{(n-1)!}\mathrm{d}x=\frac{[(x-a)N]^nM}{n!}\leqslant\frac{[(b-a)N]^nM}{n!}$$

由指数函数的泰勒级数收敛域知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(b-a)N]^nM}{n}=M\mathrm{e}^{(b-a)N}<\infty$. 从而由优级数判别法知，原函数项级数一致收敛.

【15】

6. 设函数列$\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$在D上均一致收敛，则下列断语中

(I) $\{f_n(x)\pm g_n(x)\}$在D上必一致收敛.

(II) $\{f_n(x)g_n(x)\}$在D上必一致收敛.

(A) **I** 正确，**II** 不正确.　　**(B)** **I** 不正确，**II** 正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确.　　**(D)** **I** 和 **II** 都不正确.

A

【16】

9. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0,\pi)$.　　**(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n},\quad x\in[0,+\infty)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx},\quad x\in(0,+\infty)$.　　**(D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}},\quad x\in[0,+\infty)$.

A. 取$x=\frac{1}{n}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 1}{n}$发散；

B. 取$x=\frac{1}{n}$，则通项$\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\sim\frac{n}{\mathrm{e}}(n\to\infty)$，从而根据比较审敛法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$发散，从而原级数不一致收敛；

C. 取$x=\frac{1}{n}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\mathrm{e}}$发散；

D. $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n$一致有界，且$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$对于任意固定的x，单调递减趋于 0. 由AD判别法知，原级数一致收敛.

综上，该题选 D.

【17】

16. 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n^x}$.

(1) 求$f(x)$的定义域D；

(2) 证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n^x}$在$D$内不一致收敛；

(3) 证明$f(x)$在D内连续.

【解】(1) 记$u_n(x)=(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}$. 当$x\le 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)|=+\infty$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$发散.

当$x>0$时，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和有界，又当$n$充分大时，$\left\{\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}\right\}$关于$n$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}=0$，据 A-D 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛. 综上知$D=(0,+\infty)$.

(2) 由$u_n(x)\in C[0,+\infty)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(0)$发散知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(0,+\infty)$内不一致收敛；

(3) 对任意$[a,b]\subset(0,+\infty)$，则$a>0$. 当$x\in[a,b]$，n充分大时，$\left\{\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}\right\}$关于$n$单调减少，且$0<\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}\le\dfrac{\ln(1+n)}{n^a}\to 0\ (n\to\infty)$，即$\left\{\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}\right\}$在$[a,b]$上一致趋于 0；又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$的部分和$|S_n|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\le 1$，即一致有界. 据 A-D 判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{n^x}$在$[a,b]$上一致收敛，即在$(0,+\infty)$内内闭一致收敛, 据连续性定理知$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续.

【18】

17. 设$\{u_n(x)\}$是定义在$[0,1]$上的函数列，且$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{n}, & x=\dfrac{1}{n}\\[2mm] 0, & x\ne\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$

(1) 判断函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$上的一致收敛性，并说明理由；

(2) 是否存在收敛的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$，满足$|u_n(x)|\le M_n\ (x\in[0,1],n=1,2,\cdots)$? 若存在，请举出一例；若不存在，请说明理由.

【证】(1) 一致收敛. 事实上，由于当$x\in[0,1]$时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\frac{100}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty)$$

据 Cauchy 一致收敛准则知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

(2) 不存在. (反证) 若存在M_n，使得当$x\in[0,1]$时，有$|u_n(x)|\le M_n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，则有$\left|u_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\dfrac{100}{n}\le M_n$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{100}{n}$收敛，这是不可能的，故导出矛盾.

【19】

五、证明函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$\mathbb{R}$上有连续导数.

【证】由于当$x\in\mathbb{R}$时，$\frac{|\sin nx|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，故据$M$-判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$在$\mathbb{R}$上一致收敛，从而收敛.

又$\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\frac{\cos nx}{n^2}$在$\mathbb{R}$上连续，$\frac{|\cos nx|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$也在$\mathbb{R}$上一致收敛，据逐项求导定理有$S'(x)\in C(\mathbb{R})$，且$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

【20】

六、讨论函数项级数

$$x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$$

在$D_1=[0,1]$和$D_2=\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的一致收敛性.

事实上这个题出的有点问题，能不能看出来?

【解】由于原函数项级数的部分和函数

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^k-x^{k-1})=x^n\xrightarrow{(n\to\infty)}S(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

(1) 取$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\in[0,1]$，则$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}\not\to 0\ (n\to\infty)$，故原级数在$[0,1]$上非一致收敛;

(2) 当$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，$|S_n(x)-S(x)|=x^n\le\frac{1}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$，故原级数在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上一致收敛.

【21】

九、**(1)** 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[1,+\infty)$上一致收敛于和函数$S(x)$，又$\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=u_n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=S$.

(2) 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+3x)^n}$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)$.

【证】**(1)** 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，由条件知 $S_n(x)\overset{[1,+\infty)}{\rightrightarrows}S(x)$，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$．

故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，对 $\forall n\geq N_1,\forall x\geq 1$，有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$．又 $\exists N_2\in\mathbb{N}$，对 $\forall n\geq N_2$，有 $|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{3}$．令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则有

$$|S_N(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad |S_N-S|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $\lim_{x\to+\infty}S_N(x)=S_N$，故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists X>1$，对 $\forall x>X$，有

$$|S_N(x)-S_N|<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而

$$|S(x)-S|\leq|S(x)-S_N(x)|+|S_N(x)-S_N|+|S_N-S|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\text{ 即证 }\lim_{x\to+\infty}S(x)=S.$$

(2) 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，由于 $\left|\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+3x)^n}\right|\leq\frac{x^n}{(1+3x)^n}<\frac{1}{3^n}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$，据 M-判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+3x)^n}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛．由(1)有

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+3x)^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}.$$

【22】

8. 下列函数项级数在指定区间上一致收敛的是　　　　　　　　　　……

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\quad x\in(0,\pi)$.　　　**(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x,\quad x\in(0,1]$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{nx}\mathrm{e}^{-nx},\quad x\in(0,+\infty)$.　　　**(D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x},\quad x\in(-1,+\infty)$.

解：D

A：令 $x=0$，喵了

B：运用 Cauchy 不一致收敛准则，取 $p=n,x=\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{n}}$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} x^k \ln x\right| \geqslant |nx^n \ln x| = \frac{\ln 2}{2}$$

C：运用 Cauchy 不一致收敛准则，取 $p=n, x=\frac{1}{n}$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{kx}\,\mathrm{e}^{-kx}\right| \geqslant n|nx\,\mathrm{e}^{-nx}| = \frac{n}{\mathrm{e}} \to \infty$$

D：A-D 喵了

【23】

9． 已知函数列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上定义，考虑以下命题，则 ……

(I) 若 $\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上必不一致收敛.

(II) 若 $\exists\{x_n\}\subset[a,b]$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_n)\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上必不一致收敛.

(A) **I** 正确，**II** 不正确. **(B)** **I** 不正确，**II** 正确.

(C) **I** 和 **II** 都正确. **(D)** **I** 和 **II** 都不正确.

解：

(I) 不妨设 $x\in[0,1]$，考虑如下反例：记 $Q=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$

$$u_n=\begin{cases} x, & x\in\frac{1}{n}\cup\left(\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]-Q\right) \\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=x, \forall x\in[0,1]$，且存在 $x_n=\frac{1}{n}$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ 发散，但是：

$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\frac{1}{n+1}, \forall p\in\mathbb{N}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

(II) 显然正确. 考虑反证法，若一致收敛，则对于任意的 $\varepsilon=\frac{\left|\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|}{2}>0$，均存在 $N\in\mathbb{N}$，对于任意的 $n>N$，均有：

$$|u_n(x)|<\varepsilon, \forall x\in[a,b]$$

取 $x=x_n$，并两边同时取极限得到：

$$\left|\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|\leqslant\frac{\left|\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|}{2}\Rightarrow\left|\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)\right|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n(x_n)=0$$

矛盾！综上，该题选 B.

【24】

15．设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$．**(1)** 求 $f(x)$ 的定义域 D；**(2)** 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 D 内的一致收敛性，并说明理由；**(3)** 证明 $f(x)$ 在 D 内连续.

经典考察内闭一致收敛的题目

【解】(1) 当 $x\le 0$ 时，显见原级数发散；当 $x>0$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}}=\mathrm{e}^{-x}<1$，故原级数收敛，从而 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$．

(2) 由于 $u_n(x)=\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\in C[0,+\infty)$，且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ 发散，故函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内非一致收敛.

(3) 对于 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$，则 $a>0$．因为对 $\forall x\in[a,b]$ 有

$$|u_n(x)|=\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{n\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$ 收敛，所以根据 Weierstrass 判别法知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即在 $(0,+\infty)$ 内内闭一致收敛. 再由连续性定理可知 $f\in C(0,+\infty)$．

【25】

16．设函数 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微，其导数构成的函数列 $\left\{g^{(n)}(x)\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，且 $\lim_{n\to\infty}g^{(n)}(0)=1$．求 $\lim_{n\to\infty}g^{(n)}(x)$．

【解】 由条件知 $\left\{g^{(n)}(x)\right\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}g^{(n)}(x)=f(x)$．又因为 $\left(g^{(n)}(x)\right)'=g^{(n+1)}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $\left\{g^{(n+1)}(x)\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 根据微分号下求导定理，对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 有

$$f'(x)=\left(\lim_{n\to\infty}g^{(n)}(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}\left(g^{(n)}(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}g^{(n+1)}(x)=f(x).$$

由此导出 $f(x)=C\mathrm{e}^x$．注意到 $f(0)=\lim_{n\to\infty}g^{(n)}(0)=1$，则有 $C=1$，从而 $f(x)=\mathrm{e}^x$．

【26】

17．设函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

(1) 证明：函数列 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上收敛，并求极限函数；

(2) 试给出函数列 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛的充要条件，并证明你的结论.

【证】(1) 由 $f\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$ 知，$\exists M>0$，使得对 $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，有 $|f(x)|\le M$，故

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\le x<1,\\ f(1), & x=1.\end{cases}$$

即 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上收敛于极限函数 $g(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\le x<1,\\ f(1), & x=1.\end{cases}$

(2) $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛的充要条件是：$f(1)=0$.

必要性 因为 $f_n(x)=x^n f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛于 $g(x)$，所以根据连续性定理知 $g\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$，从而 $f(1)=g(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=0$.

充分性 当 $f(1)=0$ 时，则 $g(x)\equiv 0$. 因为 $|f_n(x)|\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$，且

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|=0=g(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right];$$

又对 $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 有 $|f_{n+1}(x)|\le|f_n(x)|$，即 $\{|f_n(x)|\}$ 单调递减. 根据 Dini 定理知函数列 $\{|f_n(x)|\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛于 0，从而 $\{f_n(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上也一致收敛于 0.

二、幂级数

前言：本章内容知识点很少，但是计算量可能会很大，结合历年试题的情况来看，这部分知识都大多在选填题以及大题的前几道出现，特点是难度中等，但是以其庞大的计算量来消磨时间，所以这一部分的题目大家一定要勤加练习，建议把书上的计算题都做了，再把本讲义的习题做了即可，这样在考试时候便可以做到快速正确的拿分

1.幂函数及其相关概念

(1)幂级数：形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

的函数项级数，其中a_n是系数，一般情况下我们研究$x_0=0$的情况

也有时候带n次方的是关于x的表达式，称之为广义幂级数

(2)收敛半径、收敛区间与收敛域：收敛半径$r=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n)^{\frac{1}{n}}}$，也可以用

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，收敛区间即为$(-r+x_0,r+x_0)$，而对于收敛域，则需要对端点处

的情况单独考察

对于广义幂级数，先换元再反解即可

(3)Abel 定理：

- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1$处收敛，则$x<|x_1|$时均收敛；若在$x_2$处发散，则$x>|x_2|$时均发散
- 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$r$，则它在$(-r,r)$内闭一致收敛，若$x=r$时收敛，则它在$(-r,r]$内闭一致收敛
- 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=r$时收敛，则$f(x)$在$x=r$处左连续，右则亦然

2.幂函数的分析性质

(1)收敛半径不随求导，积分而改变：

> **定理** 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与其**导数级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 和 **积分级数** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ **的收敛半径相等.**

但对于收敛域而言三者未必相等，通常来说是积分级数＞原级数＞导数级数

(2)逐项积分性、逐项可导性:

定理 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad x\in(-r,r)$, 则

(1) $f(x)\in C(-r,r)$;

(2) $f(x)\in D(-r,r)$, 且**可逐项求导**, 即$\forall x\in(-r,r)$:

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

(3) **可逐项积分**, 即$\forall x\in(-r,r)$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

事实上，很多求幂级数的和函数的题目就是根据这两大性质做出来的

3.函数的幂级数展开

(1)Taylor 级数展开和 Maclaurin 级数展开:

设$f(x)$在x_0处无穷次可导，则称

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

为$f(x)$在x_0处的 Taylor 级数，当$x_0=0$时候即为 Maclaurin 级数，此处的系数具有**唯一性!**

(2)什么时候$\sim$可以换成等号？即$R_n(x)\to 0$，也即$|f^{(n)}(x)|\leq M$

(3)常见初等函数的幂级数:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

对于最后一个，通常记住两个特例即可

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n,\ x \in [-1, 1)$$

(4)展开方法：

- 直接法：硬算 $f^{(n)}(x_0)$
- 间接法：积加导，作代换

4.Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} (0 < \theta_n < 1)$$

5.题目选讲

以下题目均来自历年试题，故省略出处

【1】

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n} x^n$ 的收敛域为________________.

4. 解：利用 Hadamard 公式易知收敛半径为 3，且代入两侧端点，级数通项不趋于 0，从而直接得到收敛域为$(-3,3)$.

【2】

8. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则下列说法错误的是**【　　】**

(A) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$(-1,1]$内必定一致收敛.

(B) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$(-1,3)$内必定绝对收敛.

(C) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$在$(-1,1]$内必定一致收敛.

(D) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$在$(-1,3)$内必定绝对收敛.

8. 解：A. 内闭一致收敛；
B. Abel 定理的直接推论；
C. 考虑反例$a_n=\dfrac{1}{(-2)^n\cdot n}$，若一致收敛，则于$x=-1$处连续，且$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}\big|_{x=-1}$处收敛，矛盾！
D. Abel 定理与 Hadamard 公式的直接推论.

【3】

12. 将$f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$在$x=0$处展开为幂级数，并指明等式成立范围.

12. 解：求导展开再积分回来，并判断端点敛散性即可得到：

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-1,1]$$

$$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}$$

【4】

13. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)x^n}{n}$的和函数，并指明收敛域.

解：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x),x\in(-1,1)$

【5】

2. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x-1)^n$的收敛域为______________.

解：

利用Hadamard公式计算得到：

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$$

对于边界点，$x=3$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2$发散（通项不趋于0）；$n=-1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n^2$

发散（通项不趋于0）. 综上，原幂级数收敛域为$(-1,3)$.

【6】

8. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，以下关于幂级数的结论错误的是 ……【 】

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径必为1.

(B) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[0,1]$上必一致收敛.

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$[0,1]$上必一致收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$[0,1]$上必一致收敛.

不妨取$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，从而易知该题选 D.

A. 取$x=1$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径为 1；

B. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且x^n单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$[0,1]$上一致收敛；

C. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且$\frac{x^{n+1}}{n+1}$单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$[0,1]$上一致收敛.；

D. 考虑反例$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，然后取$x=1$即可知道原级数在$x=1$处不收敛，就更不需要谈一致收敛了.

综上，该题选 D.

【7】

13. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{2-x}{2+x}$ 在 $x=0$ 处展开为幂级数，并指明等式成立范围.

解：

邻域最大范围：$x\in(-2,2]$. $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n}x^{2n},R=2$，从而有：

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}x^{2n+1},R=2$$

$x=2$ 时，由Leibniz 审敛法知级数收敛，从而得到收敛范围为：

$x\in(-2,2]$

【8】

2. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2(x-1)^n$ 的收敛域是 $[-3,5]$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛半径 $R=$____.

利用 Hadamard 公式：$\dfrac{1}{4}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n^2}\Rightarrow\dfrac{1}{R}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{n+1}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R=2$

【9】

10. 设 $a_n>0\,(n\in\mathbb{N})$，$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为1，记幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径为 R，则 ……【　　】

(**A**) $R<1$.　　(**B**) $R=1$.　　(**C**) $R>1$.　　(**D**)以上结果都有可能.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{S_n}\right)=1$$

从而收敛半径为 1.

【10】

14. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{x+3}{x-3}$ 在 $x=0$ 处展开为幂级数，并指明等式成立范围.

这都考了多少遍了………

幂级数，内闭一致收敛的东西，爽的一批：

$$f'(x)=\frac{-3}{x^2+9}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n,x\in(-3,3)$$

从而，来嘛，逐项积分嘛，你选的嘛，出题老师！

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in(-3,3]$$

【11】

四、设 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数，并指明等式成立的范围；

(2) 求 $f^{(n)}(0),\ (n=0,1,2\cdots)$.

解：

(1) 因式分解后裂开：

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln[(3x+2)(-x+1)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{3x}{2}\right)+\ln(1-x)\\&=\ln 2+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^j-\sum_{j=1}^{\infty}x^j\\&=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]x^n\end{aligned}$$

取值范围为：

$$\begin{cases}-1<\dfrac{3x}{2}\leqslant 1\\-1<-x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$$

(2) 对比泰勒级数立即可得：

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ n!\cdot\left[(-1)^{n-1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-1\right], & n\geqslant 1\end{cases}$$

【12】

十、设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，其部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sigma\in\mathbb{R}$. 证明：

(1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\geq 1$；

(2) $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sigma$.

这道题颇有难度，讲座略，诸位可以下来自行查看解析~

证明：

(1) 记$\sigma_n=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}S_k}{n}\to\sigma$，则$S_n=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}$，从而：

$$\frac{a_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}}{n}-\frac{(n-1)\sigma_{n-1}-(n-2)\sigma_{n-2}}{n}\to 0(n\to\infty)$$

也即$a_n=o(n),n\to\infty$. 我们将证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$内绝对收敛. 只需注意到：

$$|a_nx^n|\leqslant n|x|^n(n\gg 1)$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$收敛半径为1知，命题得证.

(2) 尝试利用柯西乘积将级数改写，记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j+k=n}a_jx^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

继续改写：

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\sigma_nx^n$$

从而得到：

$$f(x)=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}n\sigma_nx^n$$

注意到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

从而只需要证明：

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x}=\sigma$$

也即：

$$g(x)=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_nx^{n-1}\to\sigma(n\to\infty)$$

考虑归结法与拟合法：

Case1: $\sigma=0$时，考虑截断，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得$|\sigma_n|<\varepsilon$，从而有：

$$\begin{aligned}|g(x)|&\leqslant\left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{N}n\sigma_n x^{n-1}\right|+\left|(1-x)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}n\sigma_n x^{n-1}\right|\\&\leqslant\max_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n(1-x^2)\sum_{n=1}^{N}x^{n-1}+\varepsilon\left|(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\sigma_n x^{n-1}\right|\\&=\max_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n(1-x^2)\sum_{n=1}^{N}x^{n-1}+\varepsilon\\&\to\varepsilon(x\to1^-)\end{aligned}$$

又因为这对任意的$\varepsilon>0$均成立，从而有：

$$|g(x)|\to0(x\to1^-)$$

说明：当然，这里严格的写法需要利用上下极限.

Case2: $\sigma\neq0$时，构造级数：

$$h(x)=(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty}n(\sigma_n-\sigma)x^{n-1}$$

即可归结于 Case1.

综上，命题得证.

【13】

7. 若级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，则下列断语中错误的是 ……【 **B** 】

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛. **(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ 在$[0,1]$上一致收敛.

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在$[0,1]$上一致收敛. **(D)** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为1.

A. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且x^n单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在$[0,1]$上一致收敛.

B. 考虑反例$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$，然后取$x=1$即可知道原级数在$x=1$处不收敛，就更不需要谈一致收敛了.

C. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$一致收敛，且$\frac{x^{n+1}}{n+1}$单调递减且一致有界，从而根据AD判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$在$[0,1]$上一致收敛.

D. 取$x=2$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$收敛半径为 1；

【14】

10. 设 $a_n>0, S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径分别为 r 和 R,则【 **C** 】

(A)若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则有 $r=1$.　　**(B)**若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，则有 $r=1$.

(C)若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则有 $R=1$.　　**(D)**若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，则有 $R=1$.

A. 取 $a_n=\frac{1}{2^n}$，则 $r=2$；

B. 取 $a_n=n^n$，则 $r=0$；

C. $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{S_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n+1}}=1$；

D. 取 $a_n=\begin{cases}n^n-(n-1)^{n-1}, & n\geqslant 2\\ 1, & n=1\end{cases}$，则 $R=0$.

综上，该题选 C.

【15】

13.（1）将函数 $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ 在 $x_0=0$ 处展开成幂级数；

（2）设 $g(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$，求 $g^{(n)}(0)$，$(n=0,1,2,\cdots)$.

（1）$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$；

（2）$g(x)=\frac{x(1-x)}{1-x^3}=x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{3n+1}-x^{3n+2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$，对比系数得到：

$$g^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=3k\\ n!, & n=3k+1\\ -n!, & n=3k+2\end{cases},k\in\mathbb{N}$$

【16】

14.将函数 $f(x)=3\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 展开成幂级数.

记$t=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow x=\dfrac{1+t}{1-t}$，从而有：

$$\begin{aligned}f(x)&=3\ln x=3\ln\frac{1+t}{1-t}=3\ln(1+t)-3\ln(1-t)\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}t^n=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}t^{2n-1}\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\end{aligned}$$

【17】

八、设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}x^n$.

(1) 证明 $f(x)$ 在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上连续，在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$可导，并求 $f'(x)$；

(2) 判断 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的左可导性，并说明理由.

【证】(1) 原幂级数的半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\dfrac{1}{2}$，又当 $x=\pm\dfrac{1}{2}$时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n^2}$收敛，根据连续性定理知 $f\in C\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

由于导数幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{n-1}$ 的收敛半径也是$\dfrac{1}{2}$，且当 $x=-\dfrac{1}{2}$时，级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{n-1}$ 在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$内内闭一致收敛. 据逐项求导定理知 $f(x)$ 在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$可导，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-2x)}{x}, & x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\setminus\{0\},\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

(2) 由于 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处左连续，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\left[-\dfrac{\ln(1-2x)}{x}\right]=+\infty$，据导数极限定理知 $f'_-\left(\dfrac{1}{2}\right)=+\infty$，从而 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处非左可导.

【18】

6. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 和 $x=3$ 依次为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 (　　)

(A) 收敛点，收敛点.　　**(B)** 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点.　　**(D)** 发散点，发散点.

【6】解：由已知，收敛半径为 1，从而新的幂级数收敛域内部为：

$$x-1\in(-1,1)\Rightarrow x\in(0,2)$$

从而该题选 B.

【19】

11. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. **(1)** 将 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处展开为幂级数，并求收敛域;

(2) 求 $f^{(n)}(1)$，$(n=0,1,2,\cdots)$.

【解】**(1)** $f(x)=\dfrac{x-1}{2\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)}=\dfrac{x-1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n,\quad x\in(-1,3)$$

(2) 根据唯一性定理知

$$f^{(n)}(1)=\begin{cases}0, & n=0,\\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}n!, & n\geq 1.\end{cases}$$

三、Fourier 级数

终于最后一章了！芙丽叶，启动!

前言：本章课堂内容虽然有很多很多的证明，但是结合考试情况来看，题目主要可以分为以下四种类型：

- 选填：结合收敛定理考察
- 选填：考察 Fourier 系数的相关性质以及相关推论
- 大题：中档题，一般是先算个傅里叶系数，然后口嗨一波收敛，然后让你算个和函数啥的，再积积导导，最后一问算几个级数和，偶尔会隐性考察

Parseval 等式的应用

- 大题：难度偏高，通常围绕 Parseval 等式展开，而且可能会让你证明某些情况下的这玩意

1.Fourier 级数的基本概念与计算:

(1)Fourier 系数的计算:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

(2)Fourier 级数的形式:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

要求$f(x)$**可积与绝对可积**

(3)正弦和余弦级数：即奇偶函数的特例

- 正弦级数：即函数为奇函数(不是奇函数的就作解析延拓)，有$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

- 余弦级数：即函数为偶函数(不是偶函数的就作解析延拓)，有$b_n=0$，且

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

备注：若函数周期不是$[-\pi,\pi]$，则计算方法也需要作相应的变化

2.Fourier 级数收敛定理及相关推论

(1)Riemann 引理:

Riemann引理 设 f 在$[a, b]$上可积与绝对可积, 则

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(u)\sin pu\,du = 0 = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(u)\cos pu\,du}$$

附带一个经典积分的结果，要记住的:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

通常在填空题中以积分极限的形式考察

(2)收敛定理:

定理 设f 以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积,

且满足下面两条件之一, 则f 的F氏级数在x处收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

- **(Dirichlet-Jordan)** f 在$U(x,\delta)$上分段单调或为分段单调函数之和;
- **(Dini-Lipschitz)** f 在x处满足指数为$\alpha\in(0, 1]$的Hölder条件, 即 $|f(x\pm u)-f(x\pm 0)|\le Lu^{\alpha}$

事实上 D-L 判别法从来没考过，尽管收敛定理证明相当困难，但是一般考察其应用，总体难度不大

推论1 设f以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上至多有限个第一类间断点, 且仅有有限个严格极值点, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \begin{cases} f(x), & x\text{为连续点}, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为间断点}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases} = S(x)$$

推论2 设f以2π为周期, 在$[-\pi, \pi]$上可积与绝对可积, 且在x处有左、右导数(或拟左、右导数), 则f的F氏级数在x处收敛于$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

定义 f在x处的拟左、右导数分别定义为

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u} \quad \text{和} \quad \lim_{u\to 0^+}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}$$

3.Fourier 级数的分析性质

(1)逐项可积性：若f可积与绝对可积，且有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{b_n}{n}\right)$$

一个小推论:

推论(必要条件) 设f在$[-\pi,\pi]$上可积与绝对可积, 又

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛, 且

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.}$$

(2)逐项微分性：若$f(x)\in D[-\pi,\pi]$，且$f'(x)$可积与绝对可积，$f(\pi)=f(-\pi)$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

4.平方逼近与 Parseval 等式

(1)备注：记

记n阶三角多项式集合为

$$T = \left\{T_n(x)\middle| T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right\}$$

又记 $X = \{f(x) \mid f\text{在}[-\pi,\pi]\text{上可积与平方可积}\}$

(2)平方平均偏差的定义(大题可能会用到)：设$f,g\in X$

$$\mathrm{d}(f,g) = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x}$$

这其中，Fourier 级数是最佳逼近，即

$$\mathrm{d}(f,S_n)\leqslant \mathrm{d}(f,T_n)$$

(3)Bessel 不等式与 Parseval 等式：由$\mathrm{d}(f,S_n)\geqslant 0$即得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

令$n\to\infty$，实际上得到的是一个等式，即 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

通常在大题计算中会用到，但也会考察其证明，大题思路是，对于一个可积与平方可积的函数，首先考虑用折线函数来逼近，再利用折线函数的优良性质证明其 Fourier 级数一致收敛，最后利用最佳逼近放缩，即

$$\mathrm{d}(f,S_n)\leqslant \mathrm{d}(f,T_n)\leqslant \mathrm{d}(f,g)+\mathrm{d}(g,T_n)\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

会结合习题讲解

(4)一个关于一致收敛的推论：

推论 **设f在$[-\pi,\pi]$上除有限点外可导，在这有限点处单侧可导，且$f(-\pi)=f(\pi)$. 又$f'(x)$可积与平方可积，则f 的F氏级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$.**

证明留给大家练习(考过原题)

由$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(na_n\sin nx-nb_n\cos nx)$知$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$收敛，由 A-G 不等式

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant |a_n|+|b_n|\leqslant \frac{1}{2}n^2(a_n^2+b_n^2)+\frac{1}{n^2}$$

后者收敛，由 M 判别法结合收敛定理即得

5.题目讲解

【1】

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$ 以 2π 为周期的 Fourier 正弦级数

$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 的和函数为 $S(x)$，则 $b_1 =$ ________，$S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=$ ________.

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-S\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

【2】

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$ 以 2π 为周期的 Fourier 正弦级数

$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 的和函数为 $S(x)$，则 $b_1 =$ ________，$S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=$ ________.

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-S\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

【3】

7. 设函数 $f \in C^{(1)}[-\pi,\pi]$，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，已知 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 a_n, b_n，则 $f'(x)$ 的 Fourier 系数 a_n', b_n' $(n \ge 1)$ 应为 ……【　　】

(A) $a_n' = nb_n$，$b_n' = -na_n$.　　**(B)** $a_n' = -nb_n$，$b_n' = na_n$.

(C) $a_n' = na_n$，$b_n' = -nb_n$.　　**(D)** $a_n' = -na_n$，$b_n' = nb_n$.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx+nb_n\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos nx+b_n'\sin nx$$

从而得到：

$$a_n'=nb_n,b_n'=-na_n$$

从而该题选 A.

【4】

3. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\sin nx\cos x}{x}\mathrm{d}x=$________________.

经典考察黎曼引理的题目，一定要注意引理的条件再下手

利用黎曼引理与 Dirichlet 积分有：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin nx\cos x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\sin nx(\cos x-1)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

【5】

4. 设函数 $f(x)=x^2,x\in[-\pi,\pi]$，且以 2π 为周期，其 Fouier 系数为 $a_n(n=1,2,\cdots)$. 令

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则 $S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=$________.

解：不要忘了算 a_0

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}$$

于是有

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{3}+S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

故 $S\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$

【6】

7. 设函数$f \in R[-\pi,\pi]$，且以2π为周期，其Fouier 余弦、正弦函数分别为a_n,b_n，记函数

$f(x+1)$的Fourier 余弦、正弦系数分别为A_n,B_n，则（　　）.

A. $A_n=b_n\cos n-a_n\sin n$, $B_n=a_n\cos n+b_n\sin n$;

B. $A_n=b_n\cos n+a_n\sin n$, $B_n=a_n\cos n-b_n\sin n$;

C. $A_n=a_n\cos n-b_n\sin n$, $B_n=b_n\cos n+a_n\sin n$;

D. $A_n=a_n\cos n+b_n\sin n$, $B_n=b_n\cos n-a_n\sin n$;

直接算就好了.

$$\begin{aligned}
A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+1}^{\pi+1}f(x)\cos[n(x-1)]\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+1}^{\pi+1}[f(x)\cos nx\cos n+f(x)\sin nx\sin n]\,\mathrm{d}x\\
&=a_n\cos n+b_n\sin n\\
B_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+1}^{\pi+1}f(x)\sin[n(x-1)]\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+1}^{\pi+1}[f(x)\sin nx\cos n-f(x)\cos nx\sin n]\,\mathrm{d}x\\
&=b_n\cos n-a_n\sin n
\end{aligned}$$

从而该题选 D.

【7】

13. 设 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, x\in[0,\pi)$.

(1) 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为正弦级数，并写出和函数；

(2) 证明：当 $x\in[0,\pi]$ 时，有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$.

(1) 对$f(x)$作奇延拓，并符号重载为$f(x)$. 设$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$. 由系数公式得到：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$$

从而得到正弦级数：

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,\pi]\\ \dfrac{-\pi-x}{2}, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

(2) 利用傅里叶级数的逐项积分性质（超爽的！甚至不用考虑敛散性）即可得到：

$$\int_0^x\frac{\pi-t}{2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t\Rightarrow\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{4}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\pi^2}{6}$$

整理即得目标结论.

【8】

七、设$f(x)$是以2π为周期的连续函数，$a_0,a_n,b_n\ (n=1,2,\cdots)$是$f(x)$的F氏系数.

(1) 令$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$，求$F(x)$的Fourier展开式(用$a_0,a_n,b_n$表示)；

(2) 若$F(x)$连续可微，证明Parseval等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(1) 设：

$$F(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

从而利用周期性计算可以得到：

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x)\cos[n(x-t)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x)\,(\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=a_n^2+b_n^2\\d_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x)\sin[n(x-t)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x)\,(\sin nx\cos nt-\cos nx\sin nt)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=0\end{aligned}$$

(2) 连续可微一定收敛（好吧，其实甚至一致收敛，这就是第八题需要证明的）. 注意到：

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

从而命题得证.

【9】

八、设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有连续导数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$. 证明：$f(x)$ 的 F 氏级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

原题，喵了

【10】

8. 设 $f\in C[-\pi,\pi]$,且以 2π 为周期,其 Fourier 系数为 a_n,b_n .下列命题中【 **A** 】

① 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均必收敛于 0. ② 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 均必收敛.

③ 若 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots),b_n\ (n=1,2,\cdots)$ 全为 0，则必有 $f(x)\equiv 0$.

(A) ①, ②, ③都正确. **(B)** ①, ②正确, ③不正确.

(C) ①, ③正确, ②不正确. **(D)** ①不正确, ②, ③正确.

这几个结论可以记一下

证明：

① 这是Riemann－Lebesgue 定理的直接结论.

② 利用Parseval 等式得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{12}<\infty$$

③ 由Parseval 等式得到：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$$

综上，①②③ 均为真，从而该题选 A.

【11】

15. 设 $f(x)=x,\ x\in[0,\pi]$.

(1) 求 $f(x)$ 周期为 2π 的余弦级数，并写出其和函数在 $[0,\pi]$ 上的表达式；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.

【解】(1) $b_n=0$， $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$， 当$n\ge 1$时，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=2\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

于是

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=x,\quad x\in[0,\pi]$$

(2) 令$x=0$得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 又据 Parseval 等式有

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

导出$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$.

【12】

一、判断题(每小题 5 分)

(1) 三角级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$必不是某可积与绝对可积函数的 Fourier 级数.

【解】正确. (反证) 若$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$是 F 氏级数，则其正弦系数$b_n=\dfrac{1}{\ln n}$应满足$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛, 但级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$是发散的，矛盾.

【13】

十、设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的“**折线函数**”，其图像为用线段依次连接给定点 (x_k,y_k) $(k=0,1,\cdots,p)$ 所得，其中 $-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_p=\pi$ （$p\in\mathbb{N}$），且 $f(-\pi)=f(\pi)$.

(1) 证明：$f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(2) 证明 Parseval 等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

思想是一样的

【**证**】**(1)** 由于当 $x\in(x_{k-1},x_k)$ 时，$f'(x)=\dfrac{y_k-y_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\,(k=1,2,\cdots,p)$，且 $f'(x_k\pm 0)$ 存在，故 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积，据分部积分公式，其 Fourier 系数

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p}\left[f(x)\cos nx\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}+n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=nb_n$$

从而 $b_n=\dfrac{a_n'}{n}$，类似有 $a_n=-\dfrac{b_n'}{n}$. 于是对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|=\frac{|a_n'|+|b_n'|}{n}\le\frac{1}{2}\left(|a_n'|^2+|b_n'|^2+\frac{2}{n^2}\right).$$

据 Bessel 不等式有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n'|^2+|b_n'|^2\right)$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(|a_n'|^2+|b_n'|^2+\dfrac{2}{n^2}\right)$ 收敛. 根据 M-判别法，并注意到 $f\in C[-\pi,\pi]$ 且 $f(-\pi)=f(\pi)$，由收敛性定理有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(2) 记 $f(x)$ 的 n 阶 Fourier 多项式为 $S_n(x)$，由(1)知 $S_n(x) \xrightarrow[]{[-\pi,\pi]} f(x)$，故对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，对 $\forall n > N, \forall x \in [-\pi,\pi]$ 有 $|S_n(x) - f(x)| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}$. 从而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2\mathrm{d}x < \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\pi = \varepsilon$$

于是有

$$0 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2\mathrm{d}x < \varepsilon$$

即证.

【14】

5. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x \sin nx \cos nx}{x}\mathrm{d}x =$ __________.

如何灵活处理?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \sin nx\cos nx}{x} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^x-1)\sin nx\cos nx}{x} + \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin nx\cos nx}{x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{\mathrm{R-L\ Lemma}} 0 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin 2nx}{2nx}\mathrm{d}(2nx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

【15】

10. 设函数 $f \in R[-\pi,\pi]$，且以 2π 为周期，其 Fourier 余弦、正弦系数分别为 a_n, b_n，记函数 $f(x+\pi)$ 的 Fourier 余弦、正弦系数分别为 A_n, B_n，则 …… (**A**)

(A) $A_n = (-1)^n a_n$，$B_n = (-1)^n b_n$.　　**(B)** $A_n = (-1)^{n+1} b_n$，$B_n = (-1)^{n+1} a_n$.

(C) $A_n = (-1)^{n+1} a_n$，$B_n = (-1)^n b_n$.　　**(D)** $A_n = (-1)^n b_n$，$B_n = (-1)^{n+1} a_n$.

答案：A，直接计算即可

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\cos(nt-n\pi)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=(-1)^n a_n$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\sin(nt-n\pi)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=(-1)^n b_n$$

【16】

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\le x\le 1.\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi.\end{cases}$

(1) 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成正弦级数，并写出和函数；

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$.

【解】(1) 首先 $a_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots)$；其次当 $n\ge 1$ 时，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{\sin n}{n^2}.$$

根据 Dirichlet-Jordan 或 Dini-Lipschitz 收敛性定理有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\le\pi.\end{cases}$$

(2) 上式中令 $x=1$，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$. 再利用 Parseval 等式有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\left(\frac{\pi-1}{2}x\right)^2\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x\right]=\frac{(\pi-1)^2}{6},$$

由此得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$