线性代数知识总结

——By HP

第 1 章　线性方程组与矩阵

1.1 线性方程组的消元法

1.数域：包含$0,1$，且对四则运算封闭。

常用的数域：

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

注意：任何数域必定包含有理数域

2.线性方程组与消元法：

高斯消元法；解的情况(唯一解、无解、无穷多解)

1.2 矩阵的概念和矩阵的初等行变换

1.矩阵的定义：m行n列的数表，记作$(a_{ij})_{m\times n}$或$[a_{ij}]_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\text{或}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

常用矩阵：零矩阵/行列矩阵(即向量)/方阵($m=n$)/对角矩阵/单位矩阵/数量矩阵/三角矩阵/对称矩阵/反对称矩阵

2.初等行变换：一共三种：

1) $r_{\mathrm{i}}\leftrightarrow r_j$

2) kr_{i}

3) $r_j+kr_{\mathrm{i}}(\neq kr_{\mathrm{i}}+r_j)$

3.阶梯型与简化阶梯型：

阶梯型：零行载非零行的下方，且主元的列标号从上至下严格递增

简化阶梯型：在阶梯型的基础上满足：主元均为 1，且主元所在列其他元素都为0

- 定理：任何矩阵都可经过初等行变换化为阶梯型或简化阶梯型
-

1.3 线性方程组解的判别与求法

1.解的判别：

高斯消元法：注意同解性

解的判别：设线性方程组增广矩阵化成阶梯型有r个非零行，对应系数矩阵部分有s个非零行，则有解 $\Leftrightarrow s=r$,且有:

1) $s=r=n$，有唯一解；

2) $s=r<n$，有无穷多解；

3) $s<r$，无解.

对于齐次线性方程组同理可得！(其自带$s=r$，故零解是平凡的，只需考虑是否有非零解)

2.解的求法

根据非齐次线性方程组和齐次线性方程组分类可得其求解通法：写出对应矩阵——化简为阶梯型——判断——继续求解/化简——写出答案

第 2 章　矩阵

2.1 矩阵的运算

1.线性运算、加法和数乘：即为对各对应数字的运算，略

2.矩阵的乘法：设$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{n\times s},C=(c_{ij})_{m\times s}$，于是

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\text{于是}C=AB$$

3.矩阵乘法的规律：(矩阵的型号已经省略)

1) $AB\neq BA$ (否则二者记为相乘可换)

2) $AO=OA=O$

3) $AE=EA=A$

4) $A(BC)=(AB)C,k(AB)=A(kB)$

5) $A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA$

6) 方阵的幂：$A^k=A\times A...\times A(k\text{个}A)$，规定$A^0=E$

4.矩阵的转置：$A^T=(a_{ji})_{n\times m}$运算性质如下：

1) $(A^T)^T=A$

2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

3) $(ABC...Z)^T=Z^T...C^TB^TA^T$

4) $(A^m)^T=(A^T)^m$(A为方阵)

5) $(kA)^T=kA^T$

5.方阵的迹：$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$(注意其循环的性质：$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(CAB)=\mathrm{tr}(BCA)$)

2.2 方阵的行列式

1.标准定义：利用了逆序数，此处略

2.按行/列展开：注意区分代数余子式(这个有符号！)与余子式(即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$)

3.行列式的性质(用于计算，常用方法是范德蒙德和加边)：

1) 交换某两行/列，符号改变

2) 某行/列为0,行列式的值也为0

3) 三角行列式的值即为其对角线上的元素乘积

4) 某行公因子可提出来

5) $r_j+k\mathrm{r}_i$，行列式不变

6) $\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j)$

7) $|AB|=|A|\,|B|$

8) Vandermonde 行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&...&1\\x_1&x_2&...&x_n\\x_1^2&x_2^2&...&x_n^2\\...&...&&...\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&...&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

2.3 可逆矩阵

1.标准定义：对n阶方阵A，若存在n阶方阵使得$AB=BA=E$，则B为A的逆矩阵，称为$B=A^{-1}$

2.可逆的条件:

补充：伴随矩阵A^*(即代数余子式转置排列)：$AA^*=A^*A=|A|E$，$|A^*|=|A|^{n-1}$，

$(A^T)^*=(A^*)^T$

可逆的充分必要条件：$|A|\neq 0$，此时$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

推论：对n阶方阵A，若存在n阶方阵使得$AB=E$(或$BA=E$)，则B为A的逆矩阵

3.克拉默法则:

若$n\times n$方程组$AX=b$的系数行列式$D=|A|\neq 0$，于是有唯一解:

$$x_j=\frac{D_j}{D},j=1,2,3...n\,(D_j\text{为}D\text{中第}j\text{列换成}b\text{所得})$$

4.可逆矩阵运算性质：设下列A,B均可逆

1) $(A^{-1})^{-1}=A$

2) $(kA)^{-1}=\dfrac{A^{-1}}{k}$

3) $(A_1A_2...A_m)=A_m^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}$

4) $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m,(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

5) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

2.4 分块矩阵

1.概念：对矩阵进行分块后所得的“矩阵的矩阵”

2.运算性质：注意各矩阵运算时其对应的分块阵型号必须相同!!!

3.分块矩阵求逆的特殊情况：对角与反对角:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & ... & \\ & & & A_s \end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & ... & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & ... & & \\ A_s & & & \end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & ... & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

2.5 初等矩阵与矩阵的秩

1.初等变换与初等矩阵:

矩阵的相抵：有限次初等变换，记作$A\cong B$

初等矩阵：对单位矩阵E做一次初等变换所得的矩阵为初等矩阵(可逆)

- 定理：初等行/列变换$\Longleftrightarrow$左/右乘对应初等矩阵
- 定理：对任意$m\times n$矩阵A，存在一系列初等矩阵使得$P_s\ldots P_2P_1AQ_1Q_2\ldots Q_s=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2.矩阵的秩:

标准定义：设矩阵$A_{m\times n}$，若存在一个非零r阶子式，且所有$r+1$阶子式均为零，则r为矩阵A的秩，记作$r(A)=r$

性质:

1) 秩是唯一的
2) $0\leqslant r(A)\leqslant \min\{m,n\}$
3) $r(A^T)=r(A)$
4) 阶梯型矩阵的秩等于非零行个数
5) 可逆矩阵的秩等于其行/列数

- 定理：初等变换不改变矩阵的秩

常用秩不等式与结论：

1) $0\leqslant r(A)\leqslant \min\{m,n\}$
2) $A_{n\times m},B_{m\times s}:r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$
3) $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$
4) $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1.\end{cases}$
5) $0\leqslant r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$
6) $\max\{r(A),r(B)r(A+B)\}\leqslant r(A,B)\leqslant r(A)+r(B)$

7） $r\begin{pmatrix} A & \\ C & B \end{pmatrix} \geqslant r(A)+r(B), r\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix} \geqslant r(A)+r(B)$

8） $r(ABC) \geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$

3.求矩阵逆的初等变换法：

$$r:(A,E) \to (E,A^{-1})$$

$$c:\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

同样的，这种方法还可以用于解矩阵方程：$AX=B$

$$(A,B) \to (E,X=A^{-1}B)$$

2.6 分块矩阵的初等变换

本部分知识内容与初等矩阵部分基本相似，我们以一道例题来加深印象与说明：

Ex：设有矩阵$A_{m\times n},B_{n\times m}$，证明：$|E_m-AB|=|E_n-BA|$

证明：构造分块矩阵：

$$M=\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$$

对其进行第三种分块矩阵的初等变换：

$$\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix} M=\begin{pmatrix} E_m-AB & O \\ B & E_n \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n-BA \end{pmatrix}$$

两式两边取行列式即得：

$$|E_m-AB|=\begin{vmatrix} E_m-AB & O \\ B & E_n \end{vmatrix}=|M|=\begin{vmatrix} E_m & O \\ B & E_n-BA \end{vmatrix}=|E_n-BA|$$

得证！

第 3 章　n维向量与线性方程组的结构

3.1 n维向量

1.向量的定义： $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$或$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$(本书一般讨论的是实向量)

2.向量的线性运算： 注意零元与负向量的定义

3.线性方程组的向量表示： 通过将系数矩阵进行行分块或列分块来将方程组化为

向量形式，如

$$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}=\beta=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n$$

3.2 向量的线性关系

1.向量的线性组合:

定义：对于n维向量$\alpha_1,\alpha_2...\alpha_m,\beta$，若存在一组数$k_1,k_2...k_m$使得$\sum_{\mathrm{i}=1}^{m}k_\mathrm{i}\alpha_\mathrm{i}=\beta$，于是称$\beta$是向量组$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$的一个线性组合

引申：是否可线性表示可转化为线性方程组$Ax=\beta$是否有解

2.向量组的等价：两个向量组若均可互相表示，称之曰等价。这种性质具有反身性，对称性，传递性的特点

3.线性相关与线性无关：对任一向量组$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$，若存在不全为$0$的一组数$k_1,k_2,...,k_m$使得$\sum_{\mathrm{i}=1}^{m}k_\mathrm{i}\alpha_\mathrm{i}=0$，则称该向量组线性相关，否则为线性无关

引申 a:是否线性相关可转化为对于齐次线性方程组是否有非零解
引申 b:是否线性相关可转化为对应矩阵的秩的情况讨论

引申 c:若向量组为n个n维向量，则其线性相关$\Leftrightarrow|A|=0$，线性无关$\Leftrightarrow|A|\neq0$

4.接长向量与截短向量：若接长向量线性相关，则截短向量亦线性相关；反之亦然，若截短向量线性无关，则接长向量也线性无关

5.线性相关和线性组合的关系:

- 定理：向量组$a_1,a_2,...,a_m$线性相关$\Longleftrightarrow$至少有一个向量是其他向量的线性组合
- 定理：若向量组$a_1,a_2,...,a_m$线性无关，但$a_1,a_2,...,a_m,\beta$线性相关，则β可由$a_1,a_2,...,a_m$线性表示，且表示系数唯一

3.3 向量组的秩

1.极大线性无关组：可理解为向量组的一个部分，且这个部分可表示整体，这个部分中的各个向量线性无关

引申 a:一个向量组与其极大无关组等价
引申 b:一个向量组的不同极大无关组互相等价

- 向量组的替换定理：若向量组$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$可表示$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$，且$s>t$，则$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$中的向量必定线性相关
- 推论：若$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$线性无关，且可由$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$表示，则$s\leqslant t$

2.向量组的秩:

定义：即一个向量组的极大线性无关组所含向量的个数，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$

性质:

1) 等价的向量组秩相同
2) $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$线性无关$\Longleftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=s$，反之亦然
3) 若向量组$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$可表示$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$，则有$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\leqslant r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$

3.向量组的秩和矩阵的秩的联系: 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$，则有$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=r(A)$

且行秩等于列秩等于秩

- 定理：设向量组$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$线性无关，且$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$可由$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$线性表示，即$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)A_{m\times s}$，于是有$r(A)=r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)$

3.4 线性方程组解的结构

1.齐次线性方程组解的结构:

Case 1：只有零解，这是平凡的

Case 2：有无穷多解，于是我们有基础解系的定义：设$\eta_1,\eta_2,...,\eta_p$为$Ax=0$的一组解向量，且满足:

1) 该组解向量间线性无关
2) $\forall x_0\in\{x|Ax=0\}$，x_0可由这组解向量线性表示

- 定理：若$r(A)=r<n$，只需取$n-r$个线性无关的解向量即构成一组基础解系

通解的通法求解：对齐次线性方程组$Ax=0$：

$$A_{m\times n}\xrightarrow{\text{初等行变换}}R=\begin{pmatrix}E_r & A_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

则$\begin{pmatrix} -A_0 \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$所在的$n-r$个列向量即为一个基础解系

2.非齐次线性方程组解的结构:

导出组的概念：指对方程组$Ax=b$，将常数项换成0，即$Ax=0$，即得方程组$Ax=b$的导出组

- 定理：若非齐次线性方程组$Ax=b$满足$r(A)=r(A,b)=r$，则其特解γ_0及其导出组的基础解系$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_p$ 通过线性组合$x=\beta_0+\sum_{\mathrm{i}=1}^{n-r}k_{\mathrm{i}}\eta_{\mathrm{i}}\,(k_{\mathrm{i}}\in\mathbb{R})$即可给出方程组$Ax=b$的所有解

故通法如下：

Step 1：求特解：

$$(A,b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} E_r & A_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0_{(n-r)\times 1} \end{pmatrix}$即为一个特解

Step 2：求导出组的基础解系

Step 3：那么通解即：

$$x=\beta_0+\sum_{\mathrm{i}=1}^{n-r}k_{\mathrm{i}}\eta_{\mathrm{i}}\,(k_{\mathrm{i}}\in\mathbb{R})$$

第 4 章　线性空间与线性变换

4.1 线性空间的概念

1.线性空间的定义：必须满足以下8条基本定义：其中V是非空集合，F是数域

针对加法运算：

1) 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2) 结合律：$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

3) 零元存在性：$\forall\alpha\in V,\alpha+0=\alpha$

4) 负元存在性：$\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V,\alpha+\beta=0$

针对纯量乘法：

5) $1\alpha=\alpha$

6) $k(l\alpha)=l(k\alpha)=(kl)\alpha$

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

2.线性空间的简单性质： 设V是数域F上的线性空间，则：

1) 零元唯一，记作0

2) $\forall\alpha\in V$，负元唯一，记作$-\alpha$

3) $\forall\alpha\in V, 0\alpha=0, (-1)\alpha=-\alpha$

4) $\forall k\in F, k0=0$

5) $k\alpha=0\Longrightarrow k=0$或$\alpha=0$

3.线性子空间： 设V是数域F上的线性空间，而W是V的非空子集合，若W也V是数域F上的线性空间，称W为V的线性子空间

Ex：零子空间和全子空间(平凡子空间)

- 定理：设V是数域F上的线性空间，而W是V的非空子集合，则W为V的线性子空间的充要条件为W对V的加法和纯量乘法运算封闭(只需证明第 3.4 条)

4.2 线性空间的基、维数与坐标

1. 基、维数与坐标： 首先根据第三章中向量的线性相关/线性无关得到其广义上的概念，即将线性空间中的元素亦视作向量，于是我们便可以给出如下定义：

基底/基：若存在一组向量$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in V$满足：

1) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性无关

2) $\forall\alpha\in V,\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$线性表示

于是称$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基底/基

维数：称$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$所含向量的个数$n$为线性空间$V$的维数，记作$\dim V=n$

我们称V为n维线性空间，也记作V_n

根据n可得出有限维/无线维线性空间的概念

坐标：设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为线性空间$V$的一组基，若$\forall\gamma\in V$，有

$$\gamma=\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}x_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)x$$

其中$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$即为向量$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$下的坐标

这样我们便把广义的线性空间中的问题归结到了前三章的范畴，实现了抽象的过程，给出数学语言描述即为**同构映射**，定义如下：

设V,V'为数域F上的两个线性空间，σ为从V到V'上的一个一一对应的映射且满足：

$$\begin{aligned}&(1)\ \sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\forall\alpha,\beta\in V\\&(2)\ \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),\forall k\in F\end{aligned}$$

则σ为从V到V'上的一个同构映射，称线性空间V与V'同构

- 数域F上的任意n维线性空间均与F^n同构

2.基变换和坐标变换：考虑研究不同基下的坐标问题：

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$与$\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$为$n$维线性空间$V$的两组基，且存在矩阵$C$使得：

$$(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)C$$

于是称上式为基变换公式，矩阵C为从基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$到$\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$的过渡矩阵

对应的，某一向量在两组基下的坐标亦有关系：$Cx_\eta=x_\varepsilon$，即坐标变换公式

4.3 欧式空间

1.欧式空间的基本定义与基本性质：欧式空间主要关心向量的度量性质，其定义如下：设V为实数域$\mathbb{R}$上的一个线性空间，对于其中任意一对向量α,β，均存在一个实数与之对应，记为(α,β)，且这种对应关系满足：

1) 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
2) 线性性：$(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma),\forall k,l\in\mathbb{R},\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$
3) 正定性：$(\alpha,\alpha)\geqslant0$,且$(\alpha,\alpha)=0\Longleftrightarrow\alpha=0$，且记$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

称V为一个欧式空间，它具有的性质如下：

1) $|\alpha|\geqslant 0, |\alpha|=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$

2) $|k\alpha|=|k|\,|\alpha|$

3) 柯西-施瓦兹不等式：$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\times|\beta|$(二者线性相关时取等)

由此进一步给出欧氏空间中一些主要概念的定义：

夹角：$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\times|\beta|}$；　　　　距离：$\mathrm{d}(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$

当$(\alpha,\beta)=0$时称二者正交，两两正交的向量组称为正交向量组

通常情况下，$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{n}a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{i}}$

2.标准正交基：补充定义，度量矩阵：

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$为一组基，则内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T A\beta$，其中

$$A=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & ... & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & ... & (\varepsilon_2,\varepsilon_1)\\ ... & ... & & ...\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & ... & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}$$

为了简化内积运算过程，我们需要得出最简单的度量矩阵，于是便有了正交单位基的概念：

若一组基为正交向量组，且他们均为单位向量，即为正交单位基

3.施密特正交化方法：自然的，随便给一组基$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$，如何将之化为正交单位基？施密特正交化方法告诉我们答案：

Step 1:正交化：

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\times\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\times\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\times\beta_2$$

......

$$\beta_s=\alpha_s-\sum_{\mathrm{i}=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_{\mathrm{i}})}{(\beta_{\mathrm{i}},\beta_i)}\times\beta_{\mathrm{i}}$$

Step 2:单位化：$\eta_{\mathrm{i}}=\dfrac{\beta_{\mathrm{i}}}{|\beta_{\mathrm{i}}|}(\mathrm{i}=1,2,...,s)$

即得一组正交单位基$(\eta_1,\eta_2,...,\eta_s)$

4.正交矩阵: 设有实矩阵A,若A的列向量组为正交单位向量组,称之为正交矩阵,其具有的性质如下:

1) $A^TA=E$

2) $|A|=\pm 1$

3) $A^{-1}=A^T$

4) A^*,A^{-1}也是正交矩阵

5) 若A,B为正交矩阵,则AB亦为正交矩阵

4.4 线性变换

1.线性变换的概念与定义: 设V是数域F上的线性空间,若$\mathscr{A}$是V到自身的一个映射,则称之为一个**变换**,若它同时满足:

1) $\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta),\forall\alpha,\beta\in V$

2) $\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha),\forall k\in\mathbb{R},\alpha\in V$

则称之曰**线性变换**,常有的线性变换如下:

数乘变换:$\mathscr{A}(\alpha)=k\alpha,k\in\mathbb{R}$,$k=0$时为零变换$\mathscr{O}$,$k=1$时为恒等变换$\mathscr{A}=\mathrm{id}_V$

相似变换:$\mathscr{A}(A)=P^{-1}AP$

合同变换:$\mathscr{A}(A)=P^TAP$

线性变换中还有一些基本概念如下:令

$$\mathrm{Im}(\mathscr{A})=\{\mathscr{A}(\alpha)|\alpha\in V\},$$
$$\mathrm{Ker}(\mathscr{A})=\{\xi\in V|\mathscr{A}(\xi)=0\},$$

称前者为线性变换$\mathscr{A}$的**值域**,后者为线性变换$\mathscr{A}$的**核**,类似秩的概念:令

$$r(\mathscr{A})=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{A})),$$
$$r(\mathrm{Ker}(\mathscr{A}))=\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{A})).$$

分别称之为线性变换$\mathscr{A}$的**秩**和**零度**

2.线性变换的运算：设V是数域F上的线性空间，且T_1,T_2为两个线性变换，记

$$\begin{aligned}&(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha)\\&(kT_1)(\alpha)=kT_1(\alpha)\\&(T_1T_2)(\alpha)=T_1(T_2(\alpha))\\&(k\in\mathbb{R},\alpha\in V)\end{aligned}$$

分别为线性变换的**和、数乘、积**

3.线性变换的性质：设V是数域F上的线性空间，且T为一个线性变换，则：

1) $T(0)=0,T(-\alpha)=-T(\alpha)$

2) 线性变换保持线性关系式不变，即

$$T((\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)k)=(T\alpha_1,T\alpha_2,...,T\alpha_m)k,k=(k_1,k_2,...,k_m)^T$$

一言以蔽之：线性变换将线性相关的向量组变化为线性相关的向量组

4.5 线性变换的矩阵

1.线性变换在给定基下的矩阵：设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$是$n$维线性空间$V$中的一组基，则对于所有$V$上的线性变换$T$和所有的$n$阶矩阵均有一一对应的关系，这种关系由下面的式子确定：

$$(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),...,T(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)A$$

2.线性变换在不同基下的矩阵：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$与$\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$为$n$维线性空间$V$的两组基，线性变换$T$在该两组基下的矩阵分别为$A,B$，且矩阵$C$为从基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$到$\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$的过渡矩阵，于是有：

$$B=C^{-1}AC$$

第 5 章　矩阵的相似对角化

注意：本章所用数域F为复数域

5.1 矩阵的特征值和特征向量

1.矩阵的特征值，特征向量的概念：若对n阶矩阵A，存在$\lambda\in F$和非零向量$\alpha\in F^n$使得：

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

于是便称λ为矩阵A的一个**特征值**，α为特征值λ的一个**特征向量**

不难发现：λ为矩阵A的特征向量$\iff |\lambda E - A| = 0$

对于某个特征值λ_0，将其所有特征向量和零向量一并组成的向量空间称为该特征值的特征子空间，记作V_{λ_0}，其维数称作特征值λ_0的**几何重数**

2.特征多项式和特征方程：$|\lambda E - A|$与$|\lambda E - A| = 0$

其中每个特征值的根的重数称为该特征值的代数重数，且大于等于几何重数

3.特征值和特征向量的求法：

Step 1:解特征方程，解得所有特征值

Step 2:对每个特征值求齐次线性方程组$(\lambda E - A)x = 0$的基础解系，其所有非零线性组合即为欲求的特征向量

4.特征值和特征向量的性质：很多，这里罗列在下方，证明略：

1) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$
2) A, A^T具有相同的特征值和特征多项式
3) 对于A的多项式$g(A)$，对应的特征向量不变，而特征值变为$g(\lambda)$
4) A可逆$\iff$ A的特征值全不为0
5) 对于可逆矩阵A，特征向量不变，特征值变为$\dfrac{1}{\lambda}$
6) 对于伴随矩阵A^*，特征向量不变，特征值变为$\dfrac{|A|}{\lambda}$
7) 对于某个特征值λ_0，其几何重数小于等于代数重数
8) 不同特征值对应的特征向量线性无关

5.2 相似矩阵和矩阵的对角化

1.相似矩阵的概念：设$A, B \in F^n$，若存在可逆矩阵P使得$B = P^{-1}AP$，则称矩阵A, B相似，记为$A \sim B$，若A相似于对角阵，则称A可对角化

同样的，相似关系是一种等价关系，具有反身性，对称性和传递性

2.相似矩阵的性质：如下所示：

1) 相似矩阵具有相同的特征多项式，进而具有相同的特征值和迹和行列式
2) 注意：特征向量不一定相同！
3) 若$A \sim B$，且A可逆，则B可逆，且$A^{-1} \sim B^{-1}$
4) 若$A \sim B$，则二者相同的多项式同样相似($f(A) \sim f(B)$)
5) 任意矩阵均相似于一个上三角矩阵

3.矩阵相似对角阵的条件：矩阵所有特征值的几何重数与代数重数相等

具体操作步骤如下：

Step 1：计算特征多项式，解出各特征值及其代数重数

Step 2：计算每个$r(\lambda E-A)$，若均满足$r(\lambda E-A)=n-n_{\lambda}$($n_{\lambda}$为对应的代数重数)则可对角化，否则不能对角化

Step 3：若可对角化，则求出每个$(\lambda_{\mathrm{i}} E-A)x=0$的基础解系$(\alpha_{1\mathrm{i}},\alpha_{2\mathrm{i}},\ldots,\alpha_{r_{\mathrm{i}}})$

Step 4：令$P=(\alpha_{11},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{r_1},\alpha_{12,}\alpha_{22},\ldots,\alpha_{r_2},\ldots\ldots,\alpha_{r_n})$(所有基础解系的组合)，则$P$可逆，且$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$(包括重复的特征值)

5.3 实对称矩阵的相似对角化

1.实对称矩阵的特征值和特征向量:

两条结论：

1) 实对称矩阵的特征值全是**实数**
2) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量**正交**

2.实对称矩阵正交相似对角阵：根据上述两条结论我们不难证明(使用数学归纳法)

实对称矩阵的特殊性质：设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q使得：

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda$$

引申 a：实对称矩阵必有n个线性无关的特征向量

引申 b：实对称矩阵所有特征值的代数重数和几何重数相等

3.求实对称矩阵正交相似对角阵的方法:

一共分四步：

Step 1：计算特征多项式，解出各特征值

Step 2：求出每个$(\lambda_{\mathrm{i}} E-A)x=0$的基础解系$(\varepsilon_{1\mathrm{i}},\varepsilon_{2\mathrm{i}},\ldots,\varepsilon_{r_{\mathrm{i}}})$

Step 3：分别**正交化，单位化**

Step 4：令$Q=\left(\alpha_{11},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{r_1},\alpha_{12,}\alpha_{22},\ldots,\alpha_{r_2},\ldots\ldots,\alpha_{r_n}\right)$(所有基础解系的组合)

则Q可逆，且$Q^{-1}AQ=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$(包括重复的特征值)

第 6 章　实二次型

6.1 二次型的基本概念及化二次型为标准型

1.二次型及其矩阵表示：

二次型定义：二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\ldots+2a_{2n}x_2x_n+\ldots+a_{nn}x_n^2$$

记$a_{ij}=a_{ji}$于是记矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么二次型可以用矩阵表示为$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x^TAx$，其中$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$

我们称矩阵A的秩即为该二次型的秩：$r(f)=r(A)$

标准二次型：只含平方项

规范二次型：在标准二次型的基础上，各项的系数仅为1，-1，0

2.二次型的非奇异线性替换：

定义：$x=Py$，其中x,y为n维向量，P为可逆矩阵。此时$f=y^T(P^TAP)y$

于是进一步给出合同概念：$A,B\in F^n,\exists$可逆矩阵P：$P^TAP=B$，称二者合同：

1) 反身性、对称性、传递性
2) 合同的矩阵秩相同：$r(A)=r(B)$,若A,B合同
3) 若A为对称矩阵，A,B合同，则B也为对称矩阵

- 定理：二次型经非奇异线性替换仍变为二次型，且两次变换的矩阵合同

3.化二次型为标准二次型的方法：常用两种方法如下：

法一：正交替换法：利用第五章所学将待变换二次型的矩阵进行正交相似对角化，由正交矩阵的性质知这也是一次合同变换，于是进一步即可得到欲求的非奇异线性替换

法二：配方法：即瞪眼法，考察注意力

6.2 惯性定理与正定二次型

1.惯性定理

- 定理：任何实二次型必存在非奇异线性替换化二次型为规范标准型，且**规范标准型是唯一的**

对应概念：

正惯性指数：f的标准型的正项个数p

负惯性指数：$q=r(f)-p$

符号差：$s=p-q$

惯性定理的推论：(p表示正惯性指数)

1) 任何实对称矩阵A_n都合同于对角阵$\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_{r(f)-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}_n$

2) 两个n元二次型有相同的秩及正惯性指数的充要条件为存在非奇异线性替换

$x=Py$使得$f=x^TAx\xlongequal{x=Py}y^TBy=g$

3) n阶实对称矩阵A,B合同$\Longleftrightarrow r(A)=r(B),p(A)=p(B)$

2.正定二次型

定义：设n元二次型$f(x_1,x_2,..,x_n)=x^TAx$，若$\forall x_0\neq 0,x_0\in R^n,f(x_0)>0$，称之为**正定二次型**，对应矩阵$A$称为**正定矩阵**

若将定义中$\forall x_0\neq 0,x_0\in R^n,f(x_0)>0$改为如下则可得其他定义：

i. $\forall x_0\neq 0,x_0\in R^n,f(x_0)<0$，则为负定二次型，对应矩阵为负定矩阵

ii. $\forall x_0\neq 0,x_0\in R^n,f(x_0)\geqslant 0$，则为半正定二次型，对应矩阵为半正定矩阵

iii. $\forall x_0\neq 0,x_0\in R^n,f(x_0)\leqslant 0$，则为半负定二次型，对应矩阵为半负定矩阵

对任意实对称矩阵A，下列命题等价：

1) A为正定矩阵

2) A的正惯性指数$p=n$

3) A的特征值全部大于零

4) A合同于单位矩阵E

5) 存在非奇异矩阵M，$A=M^TM$

6) A的各阶顺序主次式全部大于零